



**CENTRO UNIVERSITÁRIO CHRISTUS – UNICHRISTUS**  
**NÚCLEO DE TECNOLOGIA – NUTEC**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**JEFERSON BEZERRA VIEIRA**

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS E MÉTODOS  
SIMPLIFICADOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE PONTES**

**FORTALEZA**

**2020**

**JEFERSON BEZERRA VIEIRA**

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS E MÉTODOS  
SIMPLIFICADOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE PONTES**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)  
apresentado ao curso de Engenharia Civil  
do Centro Universitário Christus, como  
requisito parcial para obtenção do título de  
bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Bergson da Silva Matias

**FORTALEZA**

**2020**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Centro Universitário Christus - Unichristus

Gerada automaticamente pelo Sistema de Elaboração de Ficha Catalográfica do  
Centro Universitário Christus - Unichristus, com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V657e Vieira, Jeferson Bezerra.

Estudo comparativo entre métodos numéricos e métodos  
simplificados para análise estrutural de pontes / Jeferson Bezerra  
Vieira. - 2020.

85 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro  
Universitário Christus - Unichristus, Curso de Engenharia Civil,  
Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Me. Bergson da Silva Matias.

1. Estruturas. 2. SAP2000. 3. Trem-tipo. 4. Ftool. 5. Rigidez . I.  
Título.

CDD 624

**JEFERSON BEZERRAVIEIRA**

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS E MÉTODOS  
SIMPLIFICADOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE PONTES**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)  
apresentado ao curso de Engenharia Civil  
do Centro Universitário Christus, como  
requisito parcial para obtenção do título de  
bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Me. Bergson da Silva  
Matias

Aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Me. Bergson da Silva Matias (Orientador)

Centro Universitário Christus

---

Profa. Me. Mariana de Araújo Leite

Centro Universitário Christus

---

Prof. Agérbon César Cunha de Nobrega

Centro Universitário Christus

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus por mais um sonho conquistado durante essa longa jornada, graças a Ele tive força e determinação para persistir nesse caminho.

Aos meus pais, Francisca Edileuza e José Carlos, minhas irmãs, Janaina e Ana Beatriz, por serem a base da minha vida e apoio para conclusão dessa graduação.

A minha namorada, Mariana Oliveira, por todo incentivo, apoio, auxílio nas minhas decisões e que sempre esteve ao meu lado durante todos os momentos.

Agradeço aos meus amigos (Felipe, Iran, Rodrigo, Roger e Yuri) por toda a amizade construída nessa graduação, amigos que levarei por toda a vida.

Agradeço aos meus orientadores Me. Eric Mateus e Me. Bergson da Silva por todos os ensinamentos que foram essenciais para conclusão deste trabalho.

Agradeço aos professores Ma. Mariana de Araújo e Agérbon César pela atenção despendida durante este trabalho e pelas orientações passadas.

## RESUMO

Os resultados extraídos da análise estrutural influenciarão diretamente no produto final de um projeto de estrutura, por isso é indispensável a utilização da correta ferramenta de análise. De acordo com a complexidade do problema o uso das ferramentas computacionais é essencial, devido a demanda numérica e ao natural tempo que deve ser despendido. Entretanto, para a solução de problemas mais simples, não justifica o uso de métodos mais complexos, podendo ser utilizado métodos simplificados. Com isso, a utilização dos dois métodos é sempre viável, cabendo ao projetista a correta escolha que lhe fornecerá resultados satisfatórios. Este trabalho consiste em realizar um estudo comparativo entre duas metodologias de cálculo aplicado nas vigas longarinas de pontes rodoviárias de concreto armado, com o intuito de verificar a influência da rigidez da viga na distribuição dos esforços internos. Foram estudadas duas metodologias para a obtenção de esforços internos em vigas longarinas: métodos simplificados e Método dos Elementos Finitos (MEF). Foram utilizados os seguintes métodos simplificados para obtenção do trem-tipo de flexão: coeficientes de repartição para seção transversal com vigas múltiplas e o método das linhas de influência para seção transversal com duas vigas longarinas. A partir disso, foram comparados os resultados das envoltórias de esforços internos da viga longarina para três modelos, variando a altura da viga. Os resultados indicaram que o aumento da rigidez da viga longarina aproxima os resultados obtidos através do SAP2000 com os resultados obtidos por meio das linhas de influência. Porém, no método Guyon-Massonnet, percebeu-se que os resultados obtidos se aproximam melhor do SAP2000, em algumas seções das vigas, já que esse método utiliza parâmetros de rigidez à flexão e à torção. Portanto, o estudo entre metodologias de cálculo tornou-se bastante relevante, visto que apresentaram resultados satisfatórios em ambas situações, devendo ser observada a ocasião mais crítica para o devido dimensionamento.

**Palavras-chave:** Estruturas. *SAP2000*. Trem-tipo. Ftool. Rigidez.

## ABSTRACT

The results from the structural analysis will directly influence the structural design final results, then using the right analysis tool is indispensable. According to the complexity of the problem, the usage of computational tools essential, due to the numerical demand and the time that naturally must be spent. However, for solving simple problems, it is not wise to use more complex methods, so simplified methods can be used. Thereby, the usage of both methods is always feasible, leaving to the designer to make the right choice that will provide him with satisfactory results. This work consists in the accomplishment of a comparative study between two calculation methodologies applied to reinforced concrete road bridges longitudinal beams, in order to evidence the beam stiffness influence in the distribution of internal efforts. Two methodologies for obtaining internal stresses in longitudinal beams were analyzed: the simplified methods and the Finite Element Method (FEM). The following simplified methods were used to obtain the flexion type train: distribution coefficients for cross-section with multiple beams and the influence lines method for cross-section with two beam members. Then, the stringer beam internal results of were compared to all three models, changing the height of the beam. The results indicated that the increase in the stiffness of the beam gets the results from SAP2000 closer to the results from the influence lines. However, in the Guyon-Massonnet method, it was noticed that in some section of the beams, the results obtained are closer to the ones from SAP2000, since this method uses flexural parameters and torsional stiffness. Therefore, the study between calculation methodologies has become quite relevant, since they have presented satisfactory results in both situations, and the most critical situation should be accounted for proper dimensioning.

**Keywords:** Structures. SAP2000. Load Train. Ftool. Stiffness.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elementos lineares (viga e pilares) .....	15
Figura 2 - Elementos de superfície (placa) .....	16
Figura 3 - Estrutura real e o seu modelo estrutural.....	16
Figura 4 - Pórtico com ligações a) articuladas e b) rígida .....	17
Figura 5 - Esquema estrutural para obtenção dos coeficientes.....	19
Figura 6 - Eixos globais, cargas, reações, deslocamentos e rotações de um quadro plano .....	20
Figura 7 - Pórtico Espacial .....	20
Figura 8 - Grelha de vigas e lajes .....	21
Figura 9 - Diagrama tensão-deformação do concreto .....	22
Figura 10 - Módulo de elasticidade tangente e secante .....	23
Figura 11 - Não-linearidade geométrica.....	25
Figura 12 - Malha com domínio de limite curvo.....	27
Figura 13 - Exemplos de elementos finitos .....	28
Figura 14 - Divisão estrutural de uma ponte .....	29
Figura 15 - Tipos de Pontes.....	30
Figura 16 - Vigas e lajes de concreto moldadas no local .....	30
Figura 17 - Trem-tipo NBR 7188 (ABNT, 2013) .....	32
Figura 18 - Linhas de Influência de reações de apoio .....	33
Figura 19 - Trem-tipo com cargas concentradas .....	33
Figura 20 - Trem-tipo com cargas uniformemente distribuídas.....	34
Figura 21 - Seção transversal de uma ponte com duas vigas principais sem laje inferior .....	35
Figura 22- Cortes sobre o tabuleiro .....	36
Figura 23 - Trem-tipo longitudinal de flexão .....	38
Figura 24 - Envoltórias de esforços.....	40
Figura 25 - Seções transversais das pontes.....	42
Figura 26 - Corte longitudinal da ponte analisada.....	43
Figura 27 - Fluxograma de modelagem do trem-tipo.....	44
Figura 28 - Malha de elementos finitos no SAP2000 para pontes de a) duas vigas e b) vigas múltiplas .....	45
Figura 29 - Áreas dos elementos estruturais para ponte dotada de duas vigas.....	47
Figura 30 - Áreas dos elementos estruturais para ponte de vigas múltiplas.....	49

Figura 31 - Cargas permanentes das vigas longarinas.....	50
Figura 32 - Trem-tipo simplificado de flexão para ponte dotada de duas vigas .....	51
Figura 33 - Cargas permanentes para ponte dotada de duas vigas, (H=2.00m) .....	51
Figura 34 - Envoltória de momento fletor para ponte dotada de duas vigas, (H=2.00m) .....	51
Figura 35 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000, (H=2.00m) .....	52
Figura 36 - Cargas permanentes para ponte dotada de duas vigas, (H=3.00m) .....	53
Figura 37 - Envoltória de momento fletor para ponte dotada de duas vigas, (H)=3.00m .....	53
Figura 38 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000, (H=3.00m) .....	54
Figura 39 - Cargas permanentes para ponte dotada de duas vigas, (H=3.50m) .....	55
Figura 40 - Envoltória de momento fletor para ponte dotada de duas vigas, (H)=3.50m .....	55
Figura 41 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000, (H=3.50m) .....	55
Figura 42 - Seção da ponte a) transversal e b) longitudinal .....	57
Figura 43 - Coeficientes de repartição para vigas externas, (H=2.00m) .....	62
Figura 44 - Trem-tipo para as vigas externas, (H=2.00m) .....	62
Figura 45 - Carregamento permanente para as vigas externas, (H=2.00m) .....	63
Figura 46 - Envoltória de momento fletor para as vigas externas, (H=2.00m) .....	63
Figura 47 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para vigas externas, (H=2.00m).....	64
Figura 48 - Coeficientes de repartição para a viga interna, (H=2.00m) .....	65
Figura 49 - Trem-tipo para a viga interna, (H=2.00m).....	66
Figura 50 - Carregamento permanente para a viga interna, (H=2.00m).....	66
Figura 51 - Envoltória de momento fletor para a viga interna, (H=2.00m) .....	66
Figura 52 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para viga interna, (H=2.00m) .....	67
Figura 53 - Coeficientes de repartição para vigas externas, (H=3.00m) .....	68
Figura 54 - Trem-tipo para as vigas externas, (H=3.00m) .....	69
Figura 55 - Carregamento permanente para as vigas externas, (H=3.00m) .....	69
Figura 56 - Envoltória de momento fletor para as vigas externas, (H=3.00m) .....	69
Figura 57 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para vigas externas, (H=3.00m).....	70
Figura 58 - Coeficientes de repartição para a viga interna, (H=3.00m) .....	71

Figura 59 - Trem-tipo para a viga interna, (H=3.00m).....	72
Figura 60 - Carregamento permanente para a viga interna, (H=3.00m).....	72
Figura 61 - Envoltória de momento fletor para a viga interna, (H=3.00m) .....	72
Figura 62 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para viga interna, (H=3.00m) .....	73
Figura 63 - Coeficientes de repartição para vigas externas, (H=3.50m) .....	74
Figura 64 - Trem-tipo para as vigas externas, (H=3.50m) .....	75
Figura 65 - Carregamento permanente para as vigas externas, (H=3.50m) .....	75
Figura 66 - Envoltória de momento fletor para as vigas externas, (H=3.50m) .....	75
Figura 67 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para vigas externas, (H=3.50m).....	76
Figura 68 - Coeficientes de repartição para a viga interna, (H=3.50m) .....	77
Figura 69 - Trem-tipo para a viga interna, (H=3.50m).....	78
Figura 70 - Carregamento permanente para a viga interna, (H=3.50m).....	78
Figura 71 - Envoltória de momento fletor para a viga interna, (H=3.50m) .....	78
Figura 72 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para viga interna, (H=3.50m) .....	79

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficientes para consideração da solidariedade entre vigas e pilares externos.....	18
Tabela 2 - Aproximação da rigidez dos elementos estruturais .....	24
Tabela 3 - Áreas dos elementos estruturais da ponte em m <sup>2</sup> .....	48
Tabela 4 - Dimensões das vigas transversinas em m.....	48
Tabela 5 - Áreas dos elementos estruturais da ponte em m <sup>2</sup> .....	49
Tabela 6 - Dimensões das vigas transversinas em m.....	50
Tabela 7 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000, (H=2.00m) .....	52
Tabela 8 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000, (H=3.00m) .....	54
Tabela 9 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000, (H=3.50m) .....	56
Tabela 10 - Momentos de Inércia .....	57
Tabela 11 - Rigidezes à flexão e à torção .....	59
Tabela 12 - Parâmetros de torção e travamento para cada longarina .....	59
Tabela 13 - Coeficientes de repartição para $\alpha=0$ e $\alpha=1$ ( $m_0$ e $m_1$ ).....	60
Tabela 14 - Coeficientes de repartição para $\theta=0.6$ .....	61
Tabela 15 - Coeficientes de repartição para cada viga longarina .....	61
Tabela 16 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para vigas externas, (H=2.00m).....	64
Tabela 17 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para viga interna, (H=2.00m) .....	67
Tabela 18 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para vigas externas, (H=3.00m).....	70
Tabela 19 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para viga interna, (H=3.00m) .....	73
Tabela 20 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para vigas externas, (H=3.50m).....	76
Tabela 21 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para viga interna, (H=3.50m) .....	79

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelos Estruturais .....</b>	<b>16</b>
2.1.1	<i>Viga contínua.....</i>	18
2.1.2	<i>Pórticos Planos.....</i>	19
2.1.3	<i>Pórticos Espaciais .....</i>	20
2.1.4	<i>Grelhas .....</i>	20
<b>2.2</b>	<b>Tipos de análise estrutural.....</b>	<b>21</b>
2.2.1	<i>Análise Linear.....</i>	22
2.2.2	<i>Análise não linear.....</i>	24
<b>2.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos.....</b>	<b>25</b>
<b>2.4</b>	<b>Pontes.....</b>	<b>28</b>
<b>2.5</b>	<b>Tipos de carregamentos .....</b>	<b>31</b>
<b>2.6</b>	<b>Linhas de Influência .....</b>	<b>32</b>
<b>2.7</b>	<b>Trens-tipo de flexão para pontes rodoviárias .....</b>	<b>34</b>
<b>2.8</b>	<b>Obtenção do trem-tipo por meio das linhas de influência .....</b>	<b>35</b>
<b>2.9</b>	<b>Obtenção do trem-tipo a partir dos coeficientes de repartição transversal pelo método Guyon-Massonnet .....</b>	<b>38</b>
<b>2.10</b>	<b>Envoltórias de Esforços.....</b>	<b>39</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA DE PESQUISA .....</b>	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição do modelo .....</b>	<b>42</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Carregamentos nas pontes .....</b>	<b>46</b>
4.1.1	<i>Carregamento permanente .....</i>	46
4.1.1.1	<i>Cargas permanentes das vigas longarinas para ponte dotada de duas vigas.....</i>	47
4.1.1.2	<i>Cargas permanentes das vigas longarinas para ponte de vigas múltiplas.....</i>	49
4.1.2	<i>Carregamento móvel .....</i>	50
4.1.2.1	<i>Cargas móveis das vigas longarinas para ponte dotada de duas vigas .....</i>	50
<b>4.2</b>	<b>Esforços solicitantes para ponte dotada de duas vigas.....</b>	<b>51</b>
<b>4.3</b>	<b>Esforços solicitantes para ponte de vigas múltiplas.....</b>	<b>56</b>
	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>83</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural é uma das principais etapas de um projeto de estruturas, pois é nessa etapa em que se modela o comportamento real da estrutura. Para tanto, são presumidas uma série de hipóteses simplificadoras, acerca do comportamento do material, das ações, das condições de vínculos e da geometria, para conceber um modelo matemático capaz de determinar os esforços internos, reações de apoio, deslocamentos, rotações, tensões e deformações (MARTHA, 2017). Essas respostas da estrutura são necessárias para verificar se a mesma é segura e se atende as condições exigíveis que asseguram um adequado desempenho nas condições normais de utilização.

Antes do advento computacional, a análise estrutural era comumente realizada com o auxílio de tabelas e ábacos, fato que demandava muito tempo e cuidado pelo elevado potencial de erros. Devido à demanda numérica custosa e ao natural tempo que deve ser despendido, é impraticável, de acordo com Kimura (2018), desenvolver um projeto estrutural de ampla magnitude sem auxílio computacional.

O desenvolvimento dos computadores trouxe a possibilidade de implementar os métodos numéricos para resolução de diversos problemas cuja solução exata é de difícil obtenção. Com o intuito de representar a situação real de um problema, é criado um modelo matemático, o qual pode ser expresso por uma ou várias equações, podendo ser equações diferenciais ordinárias, derivadas parciais ou integrais. Tendo em vista o grau de complexidade de alguns problemas, são realizadas algumas considerações para simular a realidade. Segundo Brasil *et al.* (2015) a principal intenção de uma modelagem matemática não é produzir um modelo mais abrangente e sim, produzir um modelo simples possível que incorpore as principais características do que se tem interesse.

Muitos problemas de engenharia podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Muitas destas, entretanto, não podem ser resolvidas pelos métodos clássicos. Na análise estrutural de placas, por exemplo, a equação fundamental de equilíbrio é uma equação diferencial parcial de quarta ordem cuja solução inexistente para várias aplicações práticas. Em análises de engenharia de problemas complexos, soluções aproximadas baseadas em técnicas numéricas e computacionais são frequentemente obtidas (HUTTON, 2004).

Um dos métodos numéricos mais populares utilizados na análise estrutural para resolução desses problemas é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Segundo Assan (2003),

o MEF prevê a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos. Em vez de buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para o domínio inteiro, no MEF, as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito (ASSAN, 2003).

Contudo, vale destacar a relevância que os métodos simplificados exercem sobre a análise de certos casos frente a métodos numéricos. Em algumas aplicações práticas, não se justifica usar métodos mais abrangentes que são naturalmente mais complexos. Por exemplo, de acordo com Araújo (2014), na análise de uma laje maciça simplesmente apoiada em paredes de concreto, as soluções baseadas na consideração de contornos rígidos (tabelas de Bares) permitem obter resultados bastante confiáveis comparados a uma análise utilizando elementos finitos. Entretanto, se mudarmos o tipo de vinculação da laje para vigas flexíveis, os momentos fletores e as flechas da laje poderão ser significativamente diferentes (ARAÚJO, 2014). Com isso, podemos perceber que, dependendo do caso analisado, o método escolhido pode apresentar estimativas coerentes ou não.

As estruturas podem ser usadas como um dos sistemas da edificação, responsável por suportar as ações, ou pode ser a própria edificação, como é o caso dos estádios e das pontes. Pontes são elementos utilizados para transpor algum obstáculo, que pode ser natural, como um rio, por exemplo, ou feito pelo homem, como uma via, por exemplo (MARCHETTI, 2013). Neste último caso, é comum a denominação de viaduto. Entretanto, nesse texto, será utilizado apenas o termo ponte, independentemente do tipo de obstáculo.

Uma das principais dificuldades no projeto das pontes está na estimativa das ações dos veículos e dos efeitos causados por estas. Como existe uma grande variedade de veículos que circulam sobre uma via, é necessário definir um veículo padrão para o cálculo dos esforços solicitantes das pontes. Este veículo, denominado “trem-tipo”, é representado por um conjunto de cargas uniformemente distribuídas e concentradas e deve ser disposto sempre na condição mais desfavorável da ponte. Com esse trem-tipo montado e as linhas de influências, que representam a variação de um efeito elástico qualquer quando uma carga unitária percorre sobre a estrutura, é possível determinar as envoltórias de esforços para, posteriormente, ser realizado o dimensionamento.

O trem-tipo de uma viga representa a parcela da carga móvel que incidirá nesta quando o veículo é posicionado na largura do tabuleiro na posição mais desfavorável. Segundo Mendes (2017), o trem-tipo final é calculado em função do número de vigas principais, se possui ou não laje inferior e das dimensões transversais do tabuleiro. O trem-tipo das vigas

longarinas podem ser calculado, de forma simplificada, assumindo que o tabuleiro da ponte, na sua direção transversal, se comporta como uma viga simplesmente apoiada nas longarinas. A partir disso, a definição da posição crítica do trem-tipo no tabuleiro e a parcela de carga que irá para cada viga podem ser obtidas, de forma aproximada, pelo método das linhas de influência ou, quando existirem vigas múltiplas, pelo método dos coeficientes de repartição.

As cargas que atuam nas estruturas podem ser do tipo permanentes e acidentais. Pode-se dizer que as principais cargas acidentais que atuam nas pontes rodoviárias podem ser, entre outras, provenientes dos veículos (trem-tipo), frenagem, aceleração, força centrífuga, ações excepcionais e variação de temperatura, esta última deve-se considerar como indicação a NBR 6118 (ANBT, 2014). No Brasil, as prescrições destas são dadas pela NBR 7188 (ABNT, 2013).

Com base no que foi exposto, destaca-se a importância de estudos que permitam verificar até que ponto os métodos simplificados e métodos mais robustos se assemelham, se divergem e em que momento é mais benéfico a verificação dos esforços por cada método. Desse modo, este trabalho tem como objetivo principal a realização de uma análise comparativa dos resultados obtidos por métodos simplificados com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos na estimativa das envoltórias de esforços de vigas longarinas de pontes de concreto armado. Com o intuito de atingir esse objetivo geral, os seguintes objetivos específicos devem ser seguidos:

- Obter o trem-tipo de flexão das vigas longarinas de uma ponte dotada de duas vigas principais e vigas múltiplas;
- Obter os trens-tipo de flexão simplificados;
- Conceber os modelos no Ftool para obtenção das envoltórias de esforços das longarinas das pontes;
- Conceber os modelos das pontes em elementos finitos no *SAP2000*;
- Comparar os resultados das envoltórias de esforços obtidos usando o MEF com os resultados obtidos via métodos simplificados;
- Avaliar a influência do aumento da rigidez das longarinas nos resultados dos modelos em elementos finitos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

As estruturas se compõem por peças ligadas entre si, com o intuito de formar um conjunto estável, isto é, capaz de receber as solicitações externas, absorvê-las internamente e transmiti-las até seus apoios, sem que se comprometa a integridade da própria estrutura ou dos demais sistemas da edificação (SUSSEKIND, 1981).

De acordo com Martha (2017), a análise estrutural é a etapa para a concepção de um projeto em que é realizada a idealização de como se comportará a estrutura, com intuito de determinar os esforços internos e externos, apresentando as tensões, deformações e deslocamentos para verificar se o modelo idealizado atende aos requisitos necessários para garantir a segurança e um desempenho adequado para o fim no qual está sendo projetada. Kimura (2018) afirma que esta é a etapa mais importante do projeto estrutural, uma vez que o dimensionamento e o detalhamento das estruturas, bem como seu comportamento em serviço, são realizados a partir dos seus resultados.

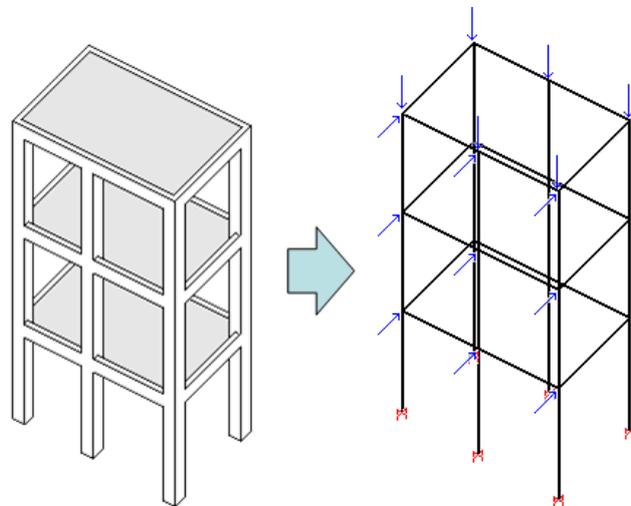
Com o intuito de realizar a modelagem e a análise estrutural são feitas algumas hipóteses simplificadoras que permitam resultar, de forma aproximada, o comportamento real da estrutura, possibilitando determinar os esforços internos, tensões, deformações, deslocamentos etc. Com isso, o modelo estrutural mais fidedigno com a realidade apresentará resultados mais satisfatórios. Essas hipóteses simplificadoras estão associadas às solicitações atuantes, ao comportamento do material, ao tipo de vinculação entre elementos estruturais e à geometria do material.

Para facilitar a análise estrutural, é comum dividir a estrutura em elementos com comportamentos característicos. Os elementos estruturais são, desse modo, definidos pela relação entre suas dimensões (elementos lineares, planos e sólidos) e pela sua função estrutural. De acordo com Fontes (2005), a classificação dos elementos estruturais envolve a geometria e uma subclassificação, atrelada ao tipo de esforço predominante. Por exemplo, nas obras civis, são comumente empregados modelos de estruturas reticuladas, isto é, estruturas formadas por barras, com seu eixo definido. Os *softwares* de projeto de estruturas de concreto mais difundidos no Brasil realizam a análise dos edifícios considerando que vigas e pilares são barras, e as lajes são transformadas em uma grelha equivalente (conjunto de barras ortogonais entre si com carga perpendicular ao eixo longitudinal).

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os elementos lineares, também designados como barras, são aqueles que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a

maior dimensão da seção transversal. O tipo de esforço predominante atuando nesse elemento servirá para classificá-lo como: viga, quando o esforço de flexão prevalece; pilar, quando as forças normais de compressão são preponderantes (vale ressaltar que nesse tipo de elemento poderá surgir esforços de flexão em uma ou nas duas direções, sendo denominado flexo-compressão normal ou flexo-compressão oblíqua, respectivamente); tirantes, quando as forças normais de tração são preponderantes; arcos, elementos curvos em que as forças normais de compressão são preponderantes, ressaltando o mesmo caso dos pilares, onde poderá existir simultaneamente esforços de flexão. Na Figura 1 está exemplificado dois elementos lineares em conjunto, a viga e o pilar.

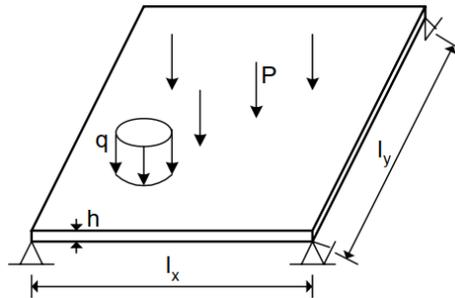
Figura 1 - Elementos lineares (viga e pilares)



Fonte: Kimura (2018)

Os elementos de superfície são aqueles em que uma das dimensões, denominada espessura, é relativamente pequena em comparação com as demais. Normalmente, podem ser divididos em três elementos: as placas, que possuem superfície plana e as ações predominantes são normais a seu plano, gerando flexão (Figura 2); as chapas, que são elementos planos sujeitos principalmente às ações presentes em seu plano; e as cascas, que são elementos que combinam o comportamento de chapa e de placa, podendo ter superfície não plana.

Figura 2 - Elementos de superfície (placa)



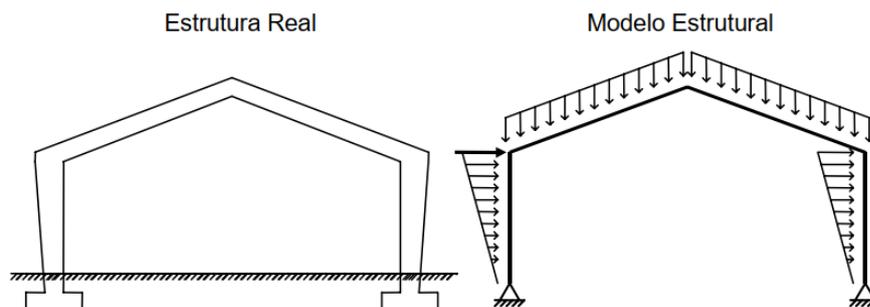
Fonte: Araújo (2014)

Os elementos supracitados são tridimensionais. Entretanto, em função da discrepância entre as dimensões do elemento, é possível simplificar e tratá-los como planos ou lineares, e considerar a tridimensionalidade através das propriedades geométricas da seção transversal. Aqueles elementos cujas dimensões são proporcionais às outras, como, por exemplo, os blocos de fundações, não podem ser simplificados e devem, portanto, ser tratados como elementos sólidos.

## 2.1 Modelos Estruturais

O modelo estrutural é um modelo matemático capaz de simular o comportamento físico da estrutura. Segundo Martha (2017), para estruturas reticuladas, o modelo matemático está embasado na Teoria de Vigas de Navier, que rege o comportamento de membros estruturais que trabalham à flexão, acrescida de efeitos axiais e de torção. Pode-se observar na Figura 3 um exemplo de modelo estrutural de um galpão, representado por barras, simulando vigas e pilares.

Figura 3 - Estrutura real e o seu modelo estrutural



Fonte: Martha (2017)

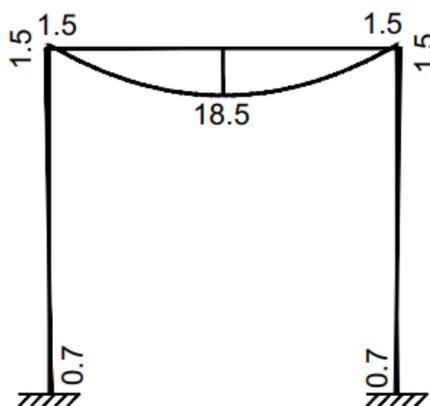
A importância de saber interpretar os resultados gerados pelo tipo de modelo estrutural é crucial. Segundo Kimura (2018), quanto maior o nível de sofisticação do modelo mais difícil será compreendê-lo e, por conseguinte, a probabilidade de cometer um erro será maior. Portanto, o modelo mais adequado é aquele no qual o projetista tenha domínio sobre ele.

Os modelos estruturais mais recorrentes na análise do comportamento de edifícios são de vigas contínuas, pórticos planos e pórticos espaciais. Com o advento computacional, o tipo de modelo que tem sido mais empregado na análise de estruturas de concreto armado é o pórtico espacial, pois a vinculação dos elementos estruturais (pilar, viga, laje e fundação) ocorre, na maioria dos casos, de forma rígida.

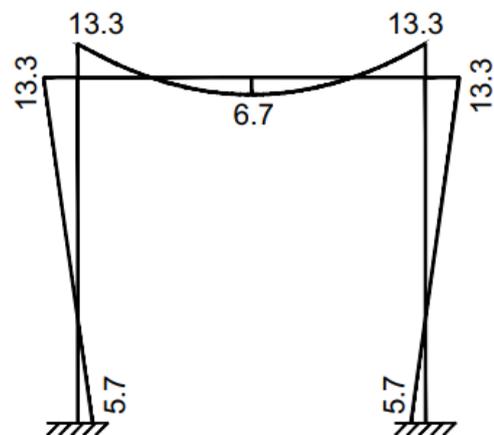
A forma como a estrutura irá se comportar depende de como os elementos estão vinculados. Portanto, ao dividir a estrutura em elementos, é preciso ter cuidado na definição de interação destes, que é feita com a definição das condições de contorno do problema. Por exemplo, se a análise da viga de concreto que forma o pórtico for feita de forma isolada, é preciso assumir que tipo de apoio o pilar irá oferecer. Ao considerar a viga bi apoiada, não haverá transmissão de esforço de flexão ao pilar. Isso só iria acontecer caso a rigidez à flexão do pilar fosse baixa em relação à rigidez da viga (Figura 4-a). Entretanto, se o pilar for suficientemente rígido para restringir de forma significativa a rotação na extremidade da viga, a vinculação entre viga-pilar tende a ser rígida, transmitindo momento fletor para o pilar (Figura 4-b).

Figura 4 - Pórtico com ligações a) articuladas e b) rígida

a)



b)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Existem vários modelos que podem ser utilizados para analisar uma estrutura, sendo uns mais limitados e outros mais sofisticados. Não existe, desse modo, um modelo melhor do que o outro; afinal, um modelo mais representativo é naturalmente mais custoso e mais complexo. Sendo assim, o modelo ideal depende da finalidade desejada.

### 2.1.1 *Viga contínua*

O modelo de viga contínua é preconizado pela NBR 6118 (ABNT, 2014) e consiste em analisar uma viga de forma isolada, apoiada em pilares ou em outras vigas, tornando a ligação da viga com o pilar articulada, ou seja, sem transferência de momento entre esses elementos. Entretanto, para ser válido esse modelo a NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece algumas correções, são elas:

- a) não podem ser considerados momentos positivos menores que os que se obteriam se houvesse engastamento perfeito da viga nos apoios internos;
- b) quando a viga for solidária com o pilar intermediário e a largura do apoio, medida na direção do eixo da viga, for maior que a quarta parte da altura do pilar, não pode ser considerado o momento negativo de valor absoluto menor do que o de engastamento perfeito nesse apoio;
- c) quando não for realizado o cálculo exato da influência da solidariedade dos pilares com a viga, deve ser considerado, nos apoios extremos, momento fletor igual ao momento de engastamento perfeito multiplicado pelos coeficientes estabelecidos na Tabela 1, sendo  $r_i$  a rigidez do elemento, dada pela razão do momento de inércia ( $I_i$ ) pelo comprimento ( $l_i$ ):

Tabela 1 - Coeficientes para consideração da solidariedade entre vigas e pilares externos

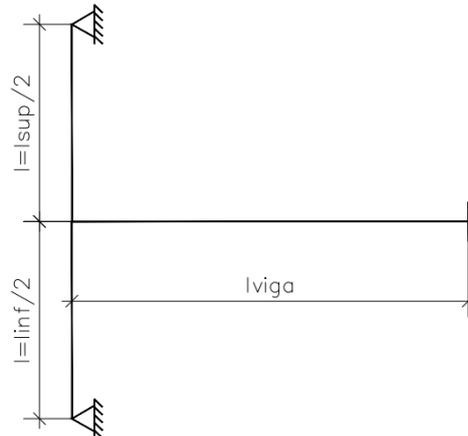
Local	Viga	Tramo superior do pilar	Tramo inferior do pilar
Coefficiente	$\frac{3.r_{inf} + 3.r_{sup}}{4.r_{vig} + 3.r_{inf} + 3.r_{sup}}$	$\frac{3.r_{sup}}{4.r_{vig} + 3.r_{inf} + 3.r_{sup}}$	$\frac{3.r_{inf}}{4.r_{vig} + 3.r_{inf} + 3.r_{sup}}$

Fonte: Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2014)

Uma limitação desse modelo é a consideração articulada entre viga e pilar, onde foi discutido que essa ligação não é exclusivamente flexível, por ser considerado a rigidez de cada elemento determinante no tipo de vinculação.

Vale ressaltar que os coeficientes obtidos na Tabela 1 foram extraídos considerando o esquema mostrado na Figura 5, o qual admite a viga sendo biengastada e os tramos do pilar sendo engastado no encontro com a viga e simplesmente apoiado na extremidade.

Figura 5 - Esquema estrutural para obtenção dos coeficientes



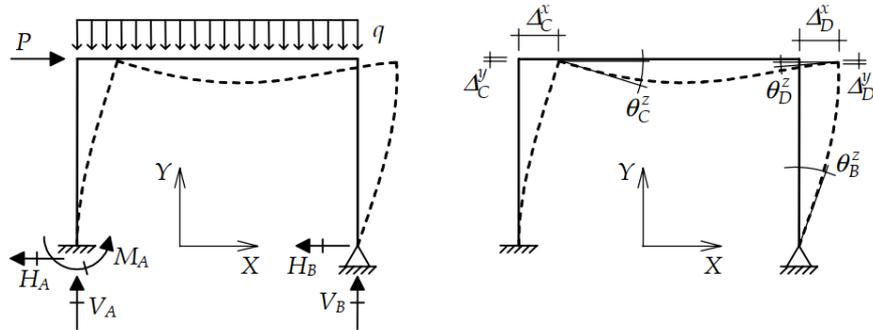
Fonte: Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2014)

### 2.1.2 Pórticos Planos

O pórtico plano, que é um modelo mais sofisticado comparado com a viga contínua, é constituído de elementos reticulados situados no mesmo plano (Figura 6), podendo a ligação entre elementos ser rígida ou flexível. Nesse modelo pode-se considerar carregamento tanto vertical, quanto horizontal. De acordo com Fontes (2005), o uso desse modelo possibilita a análise da estabilidade global, possibilitando a associação de diferentes pórticos de uma mesma direção, a partir de barras articuladas nas extremidades, simulando o efeito das lajes.

No pórtico plano ocorre a transmissão de esforços de um elemento para o outro, onde cada nó possui três graus de liberdade (duas translações e uma rotação), obtendo os esforços e deslocamentos de vigas e pilares. A restrição desse modelo é sua ausência de torção.

Figura 6 - Eixos globais, cargas, reações, deslocamentos e rotações de um quadro plano

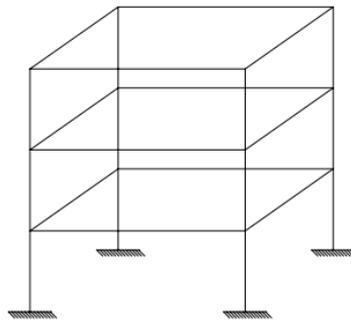


Fonte: Martha (2017)

### 2.1.3 Pórticos Espaciais

Seguindo o mesmo princípio do pórtico plano, o pórtico espacial é constituído de elementos lineares ligados de maneira rígida ou flexível. Entretanto, esse modelo é tridimensional (Figura 7), tornando a análise estrutural mais refinada. Nesse modelo cada nó possui seis graus de liberdade (três rotações e três translações) e os elementos possuem componentes de rigidez axial, à flexão e à torção. Kimura (2018) afirma que é possível avaliar a distribuição dos esforços horizontais presentes no plano do piso decorrentes de ações como a retração e protensão.

Figura 7 - Pórtico Espacial



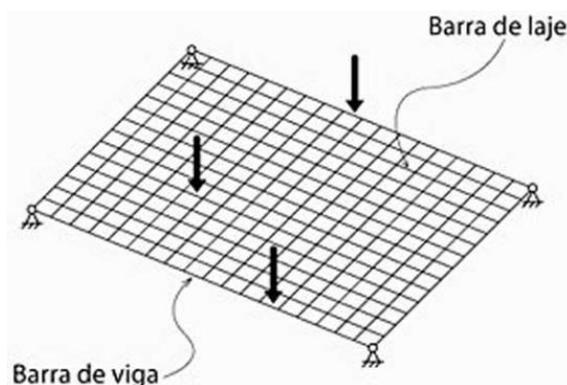
Fonte: Fontes (2005)

### 2.1.4 Grelhas

Esse modelo pode ser analisado de duas formas diferentes: grelha com vigas, que leva em consideração a análise estrutural de um pavimento contemplando elementos lineares dispostos no plano horizontal da laje, com ações atuantes na direção perpendicular ao plano, tendo uso pouco comum, exceto em caso de lajes nervuradas (FONTES, 2005); e o modelo da

grelha com vigas e lajes, que se diferencia do anterior por modelar as lajes como uma malha de barras que recebem cargas verticais ao plano. Para Kimura (2018), nesse último modelo a interação entre lajes e vigas do pavimento é considerada de forma precisa e a distribuição dos esforços nas lajes e vigas ocorre de acordo com a rigidez de cada barra, sendo transferido automaticamente para as regiões de maior rigidez (Figura 8).

Figura 8 - Grelha de vigas e lajes



Fonte: Kimura (2018)

## 2.2 Tipos de análise estrutural

A análise estrutural tem como finalidade determinar os deslocamentos e esforços oriundos de ações externas. Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), a análise estrutural determina os efeitos das ações na estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados-limites últimos (ELU) e estados-limites de serviço (ELS). Como premissa básica, o modelo estrutural deve ser adequado ao objetivo da análise a ser estudada.

Os estados limites apresentam circunstâncias impróprias quanto ao propósito a qual a estrutura foi projetada. Esses estados podem ser classificados em ELU, quando as resistências dos materiais atingem seus limites, causando ruína estrutural; e ELS, quando a utilização da estrutura está comprometida por fissuração acentuada, deformações e vibrações excessivas, etc.

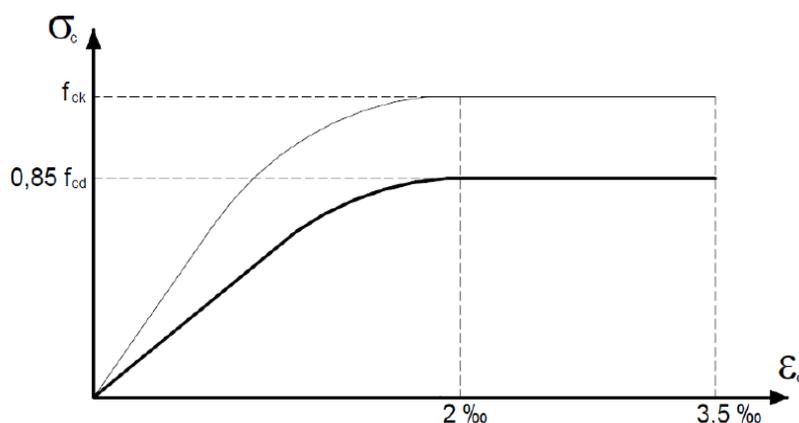
A NBR 6118 (ABNT, 2014) prescreve cinco tipos de análise estrutural que se diferenciam pelo comportamento admitido para os materiais constituintes da estrutura, sendo elas: análise linear, análise não-linear, análise linear com redistribuição, análise plástica e análise por modelos físicos. As duas primeiras são as de utilização mais recorrente em estruturas usuais e serão detalhadas nas próximas seções. A análise linear com redistribuição consiste em um rearranjo de esforços na estrutura, visto que a presença de fissuras está diretamente

relacionada à rigidez do elemento, resultando em uma modificação na distribuição de esforços internos; a análise através de modelos físicos consiste em simular o comportamento real da estrutura em ensaios feitos com modelos físicos reduzidos, sendo aplicada, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), quando os modelos de cálculo são insuficientes ou estão fora do escopo da Norma.

### 2.2.1 Análise Linear

A análise linear considera uma proporcionalidade entre tensão e deformação e entre força e deslocamento. A proporção entre tensão e deformação é dada pelo módulo de elasticidade, definido pela tangente da região linear elástica do diagrama tensão-deformação do material. A Figura 9 apresenta a relação tensão-deformação do concreto estabelecida pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

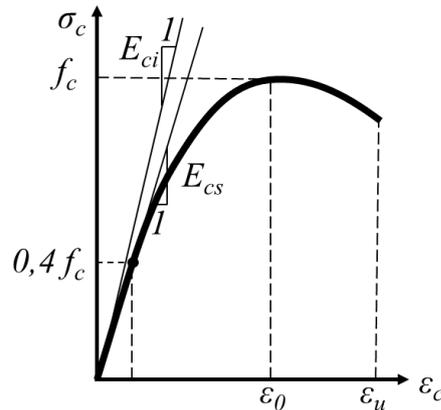
Figura 9 - Diagrama tensão-deformação do concreto



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

Como pode ser visto, a relação entre tensão e deformação é desproporcional, isto é, não-linear. Entretanto, a referida norma permite a consideração de um módulo de elasticidade único igual ao módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ), que representa a inclinação de uma reta que parte da origem e corta o diagrama em uma tensão igual a  $0,4 f_{cd}$  (Figura 10).

Figura 10 - Módulo de elasticidade tangente e secante



Fonte: Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2014)

Segundo a NBR 6118 (2014) o módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ) pode ser obtido a partir do módulo de elasticidade inicial ( $E_{ci}$ ) conforme a Equação (1).

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad (1)$$

Em que,

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \text{ (com } f_{ck} \text{ em MPa)} \quad (2)$$

O módulo de elasticidade inicial, por sua vez, pode ser estimado pela Equação (3) quando  $f_{ck}$  estiver entre 20 MPa e 50 MPa, e pela Equação (4) quando estiver entre 55 MPa e 90 MPa.

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3)$$

$$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \alpha_E \left( \frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \quad (4)$$

sendo  $\alpha_E$  obtido a partir do tipo de agregado empregado.

De acordo com Fontes (2005), a análise linear é usualmente aplicada para verificar o ELS. Para verificação do ELU, a mesma só pode ser utilizada caso possa ser garantida a ductilidade do material, que pode ser feita mediante o dimensionamento da seção nos domínios 1, 2 e 3, conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014). Para muitas situações práticas, a estimativa do comportamento não-linear do concreto pode ser feita, de forma simplificada, a partir da análise linear baseada em coeficientes de redução da rigidez como, por exemplo, a utilização da Inércia de Branson para considerar a fissuração de peças fletidas.

### 2.2.2 Análise não linear

A análise não linear está associada à relação não-linear entre tensão e deformação (não linearidade física) e entre carga e deslocamento (não linearidade geométrica). A NBR 6118 (ABNT, 2014) orienta a utilização desse método para verificações de estados-limites últimos e para verificações de estados-limites de serviço.

A não linearidade física (NLF) decorre do comportamento do material, que, à medida que o carregamento vai evoluindo, as deformações crescem de maneira desproporcional às tensões. Segundo Kimura (2018) é bastante comum o aparecimento de fissuras em peças de concreto armado que sofrem flexão, fator decisivo no comportamento não-linear da estrutura.

Dessa forma, uma maneira aproximada de levar em consideração a NLF da estrutura é alterar diretamente o valor da rigidez dos elementos estruturais. De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), para análise da estabilidade global da estrutura, pode ser considerada a NLF de maneira aproximada tomando-se como rigidez dos elementos estruturais as seguintes expressões da Tabela 2.

Tabela 2 - Aproximação da rigidez dos elementos estruturais

Elementos Estruturais		$(EI)_{cs}$
Lajes		$0,3E_{ci}I_c$
Vigas	$A'_S \neq A_S$	$0,4E_{ci}I_c$
	$A'_S = A_S$	$0,5E_{ci}I_c$
Pilares		$0,8E_{ci}I_c$

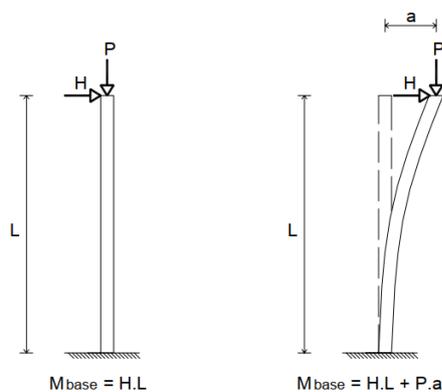
Fonte: Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2014)

A análise não-linear geométrica é realizada com a estrutura na sua posição deformada, ou seja, decorre da mudança da geometria da peça à medida que o carregamento é aplicado. Segundo Soriano (2005), o exemplo mais adequado para demonstrar a não-linearidade geométrica é em flexão composta de barra esbelta, onde ocorre a interação entre força normal de compressão e momento fletor, provocando instabilidade elástica da barra quando essa força atinge a força crítica de flambagem ou força de Euler (Figura 11).

No exemplo em questão, a força vertical  $P$  não gera momento fletor quando a estrutura está na posição indeformada. Entretanto, após apresentar um deslocamento  $a$  na sua extremidade, a força  $P$  ficará excêntrica e, como reflexo, passará a gerar um momento fletor na

base que, por sua vez aumentará o deslocamento  $a$ , resultando em um processo iterativo até que a estrutura se estabilize. Se o deslocamento horizontal for muito elevado, os efeitos de segunda ordem (efeitos adicionais decorrentes da análise da estrutura na sua posição deformada) também serão e isso irá gerar problema de estabilidade.

Figura 11 - Não-linearidade geométrica



Fonte: Fontes (2005)

Quando os esforços de 2ª ordem são considerados desprezíveis (inferiores a 10% dos respectivos efeitos de 1ª ordem) a estrutura é dita de nós fixos. Caso contrário, a estrutura é classificada como sendo de nós móveis, fato que torna obrigatória a consideração da não-linearidade física e geométrica. A NBR 6118 (ABNT, 2014) apresenta dois parâmetros para classificação de estruturas quanto sua deslocabilidade, são eles: parâmetro de instabilidade  $\alpha$  e coeficiente  $\gamma_z$ .

### 2.3 Método dos Elementos Finitos

Para um modelo matemático simples, como, por exemplo, uma viga biapoiada, a mecânica básica apresenta uma resposta exata, pois as equações diferenciais que representam esse modelo têm sua solução viável. No entanto, podem surgir na prática problemas mais complexos, onde o comportamento físico de um material se torna algo difícil ou praticamente inviável de solucionar analiticamente, o que torna indispensável a utilização de métodos numéricos com auxílio de *softwares*.

A equação de equilíbrio de uma placa, por exemplo, é governada por uma equação diferencial parcial de quarta ordem, cuja solução inexistente para muitas aplicações práticas. Para placas retangulares, é possível obter os esforços e reações de apoio por tabelas, podendo ter

algumas diferenças de acordo com o valor de coeficiente de Poisson adotado, assim como aproximações devido ao truncamento das séries trigonométricas de Fourier, afirma Araújo (2014). Entretanto, caso a laje não possua geometria retangular ou caso se deseje levar em consideração as deformações nas vigas, essa solução por séries, não pode ser aplicada. Para esses casos, é necessário recorrer a métodos aproximados, tais como analogia de grelha, e métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O método dos elementos finitos visa substituir equações diferenciais por um conjunto de equações algébricas, gerando uma resposta aproximada. A ideia principal consiste em discretizar um domínio contínuo em subconjuntos, gerando um número finito de elementos. Esses elementos são conectados por nós, e uma função de aproximação é definida para cada elemento. De acordo com Hutton (2004), os valores são calculados nos nós e, a partir desses, os valores no interior do elemento são obtidos por interpolação.

Em problemas de análise estrutural, a incógnita básica pode ser o deslocamento. A partir destes, pode-se determinar tensões, deformações e esforços internos por meio, por exemplo, das relações da teoria da elasticidade. No MEF define-se uma função de aproximação admissível para o elemento com intuito de descrever o campo de deslocamentos nesse trecho. De acordo com Assis e Bezerra (2017), se a função de aproximação contiver a função que descreve o campo de deslocamentos real da estrutura, a solução via MEF irá convergir para a solução exata.

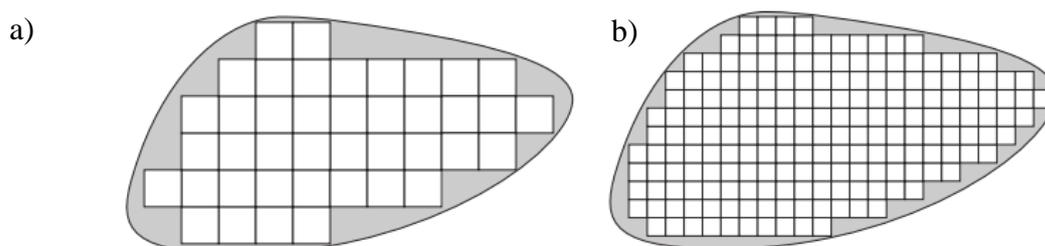
O MEF é uma ferramenta capaz de solucionar diversos problemas que recaem em equações diferenciais, como análise de tensão, transferência de calor, mecânica dos fluidos e eletromagnetismo. Essa versatilidade, aliada à facilidade de conceituação e implementação, fez com que o mesmo se difundisse, tanto que, segundo Fish e Belytschko (2007), se gasta anualmente mais de 1 bilhão de dólares nos Estados Unidos com *softwares* de elementos finitos.

De acordo com Cook et al (2002), existem diversas vantagens na utilização do MEF em relação aos outros métodos de análise numérica, sendo algumas delas: não há restrição geométrica (o corpo ou região de estudo pode ser analisado independente do formato); as condições de contorno e o carregamento não são restritos; as propriedades do material não se restringem à isotropia; a aproximação é aprimorada a partir do refinamento da malha e/ou da melhoria das funções de interpolação.

De acordo com Hutton (2004), o processo de representação do domínio de elementos finitos é comumente denominado de malha e o conjunto desses elementos é conhecido como malha de elementos finitos. A Figura 12-a demonstra um exemplo de um

domínio de limite curvo sendo convertido utilizando elementos quadrados. Pode-se observar que o fato da Figura 12-b conter um número maior de quadrados e de tamanhos menores, proporcionou em uma maior aproximação do domínio físico; intuitivamente é possível inferir que o resultado para o problema é diretamente proporcional ao refinamento da malha, isto é, quanto maior o número de elementos e quanto menor a dimensão física, a solução de elementos finitos converte-se a uma solução exata (HUTTON, 2004).

Figura 12 - Malha com domínio de limite curvo

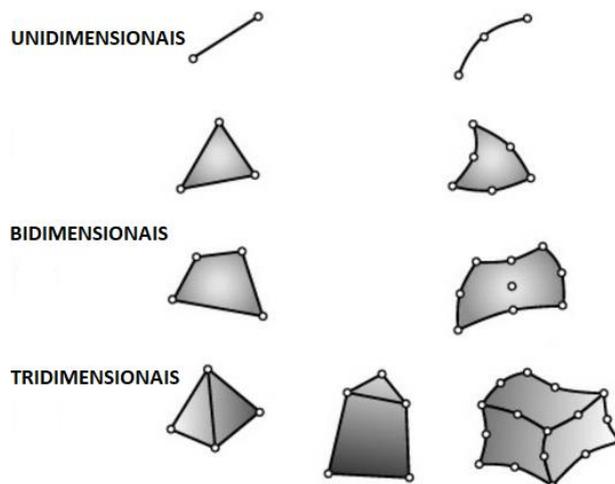


Fonte: Hutton (2004)

Segundo Vaz (2011), o MEF destaca-se pela sua maior generalidade e por suas raízes nos métodos de energia e nos métodos aproximados, podendo-se utilizar formulações tanto para problemas de análise de estruturas reticuladas, como de estruturas contínuas bi e tridimensionais.

Os elementos finitos podem ser do tipo unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, conforme mostra a Figura 13. De acordo com Hutton (2004), a melhoria na precisão geométrica nas extremidades de uma região qualquer está diretamente relacionada com a precisão da solução. Na Figura 12, por exemplo, elementos triangulares preencheriam melhor os espaços vazios e conseguiriam cobrir a fronteira de uma forma mais precisa, fato que levaria, para essa situação, uma malha de elementos triangulares a obter melhores resultados.

Figura 13 - Exemplos de elementos finitos



Fonte: Hutton (2004)

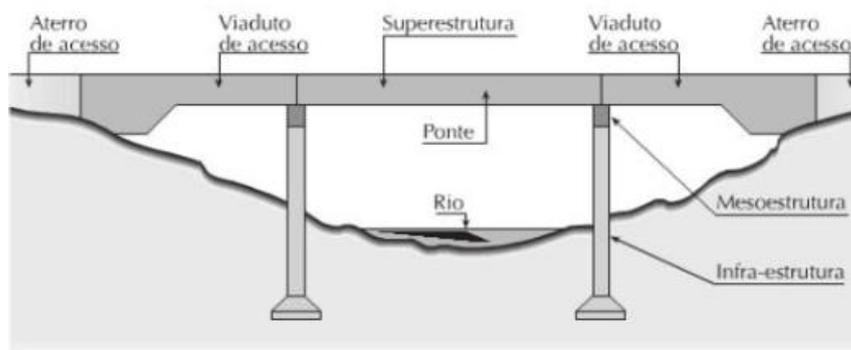
## 2.4 Pontes

Pontes são obras de artes especiais com o intuito de transpor obstáculos à continuidade do percurso normal da via, como, por exemplo, rios ou braços de mar. Quando os obstáculos não são constituídos por água, como, por exemplo, uma malha viária, é comumente denominado viaduto (PFEIL, 1979).

Segundo Freitas (1978), as pontes devem atender a quatro principais requisitos, são eles: funcionalidade, isto é, satisfazer as condições de utilização na qual foi projetada, que dizem respeito à correta capacidade de escoamento de tráfego de veículos, com o número de faixas convenientes e ainda se adequar ao sistema viário a qual está incluída; segurança, que assegurada quando a estrutura atende aos estados limites últimos e de serviço; uma ponte deve atender a um mínimo de exigências estéticas para que o aspecto da obra tenha aceitação geral; a economia, que é determinante para viabilizar a construção, é balizada pela escolha adequada da estrutura, seja ela concreto armado, protendido, aço e etc.

De acordo com Marchetti (2013), os elementos constituintes de uma ponte podem ser divididos em infraestrutura, mesoestrutura e superestrutura, como pode ser observado na Figura 14.

Figura 14 - Divisão estrutural de uma ponte

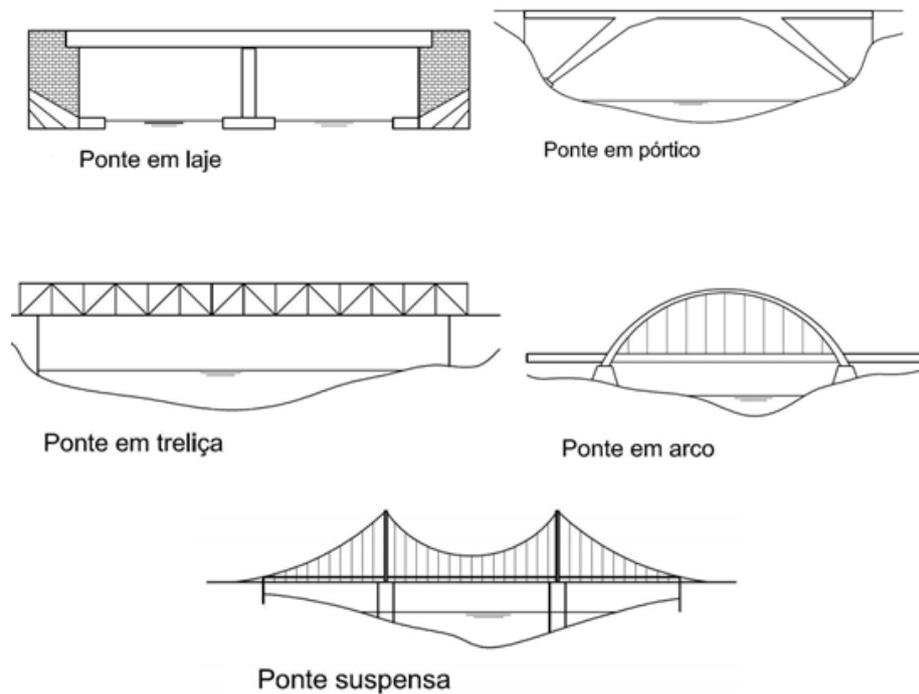


Fonte: Marchetti (2013)

Segundo Mason (1977) a superestrutura divide-se em tabuleiro (pista de rolamento) e vigamento principal e secundário. O tabuleiro é responsável por receber diretamente as cargas do tráfego e transmiti-las aos vigamentos que por sua vez transmitem à mesoestrutura. A mesoestrutura é formada por pilares, responsável por receber os esforços da superestrutura e transmiti-los à infraestrutura, em conjunto com esforços oriundos de pressões do vento e da água em movimento (PFEIL, 1979). A infraestrutura compõe-se das fundações, que podem ser em sapatas, blocos, estaqueamentos, caixões etc. (MENDES, 2017); é, portanto, o sistema responsável por transmitir as cargas de implantação da obra ao terreno.

As pontes podem ser classificadas quanto ao tipo estrutural em pontes em laje, em treliça, em pórtico, suspensa, em arco, dentre outras. A Figura 15 apresenta os tipos de pontes supracitadas.

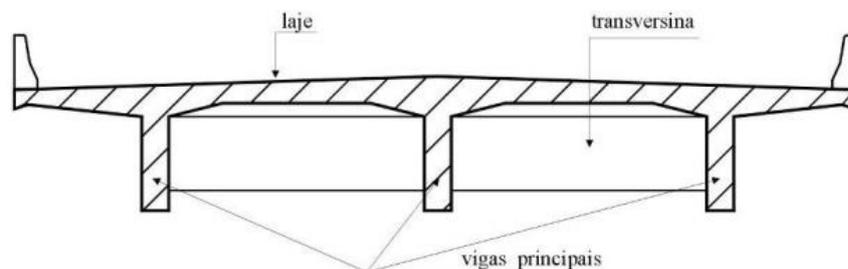
Figura 15 - Tipos de Pontes



Fonte: Adaptado de Pfeil (1979)

As pontes em viga reta de alma cheia se baseiam em conjunto de vigas que compõem a superestrutura, suportando o tabuleiro (Figura 16). Existem as vigas principais, denominadas longarinas, e as vigas secundárias, chamadas de transversinas. Esta última pode ou não ser utilizada. Normalmente, são utilizadas quando não há laje inferior para conferir rigidez lateral ao conjunto. De acordo com Leonhardt (2013), a grande vantagem da viga contínua é o fato do tabuleiro não necessitar de juntas ao longo de extensos trechos de ponte (800 a 1000m), pois juntas móveis são caras e, na medida do possível, deve-se adotar apenas uma junta móvel longitudinalmente em uma das extremidades da ponte.

Figura 16 - Vigas e lajes de concreto moldadas no local



Fonte: Vitório (2013)

## 2.5 Tipos de carregamentos

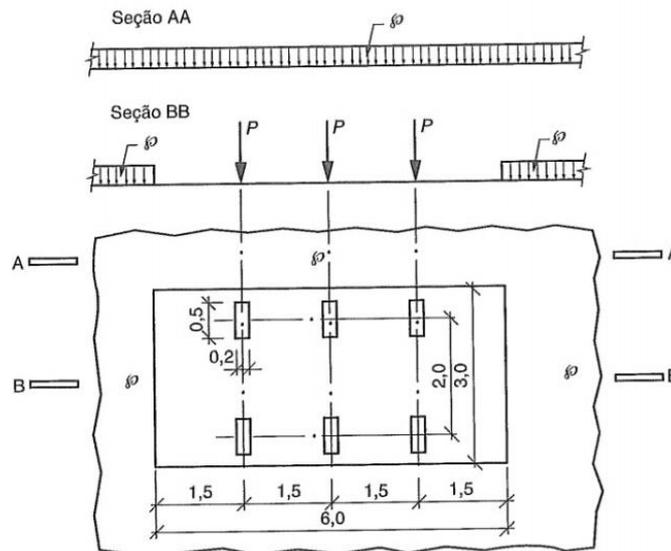
Para obtenção dos esforços internos de qualquer estrutura, é necessário ter conhecimento de todas as cargas que atuarão na mesma. Segundo a NBR 6120 (ABNT, 2019), as principais cargas que atuam em uma estrutura são cargas permanentes e acidentais. As cargas permanentes são aquelas que atuam ao longo da vida útil da estrutura, como, por exemplo, o peso próprio da estrutura, da pavimentação, do guarda-rodas, dos postes, das canalizações etc. Além dessas ações, a NBR 7187 (ABNT, 2003) orienta considerar cargas provenientes de empuxos de terra e de líquidos, forças de protensão, deformações provocadas por fluência e retração do concreto, por variações de temperatura e por deslocamentos de apoios.

As cargas acidentais são aquelas que atuam em função do seu uso, ou seja, não atuam de forma constante na estrutura. Por exemplo, as cargas do tráfego de veículos (cargas móveis), cargas de vento, pessoas, frenagem, aceleração etc. Dentre essas cargas acidentais, as cargas móveis apresentam algumas particularidades em relação às outras ações. Seu valor é pré-determinado, assim como nas outras cargas, mas, sua posição de atuação varia de acordo a trajetória que o veículo percorre na ponte. Isto é, a depender de onde o veículo estiver posicionado, os esforços solicitantes serão diferentes (SUSSEKIND, 1981).

Para viabilizar a análise, é idealizado um veículo chamado de trem-tipo, cujas características são padronizadas pela NBR 7188 (ABNT, 2013). O mesmo consiste em um conjunto de cargas estáticas concentradas aplicadas no nível do pavimento e uma carga uniformemente distribuída aplicada no nível do pavimento para representar os veículos secundários. Segundo Pfeil (1979), o trem-tipo deve ser posicionado na condição mais desfavorável para o cálculo de cada elemento, não levando em consideração a carga do eixo ou da roda que produza redução de esforços internos.

Com base na atualização da NBR 7188 (ABNT, 2013), o carregamento móvel a ser utilizado corresponde a classe 45, definido por um veículo tipo de 450 kN, com seis rodas, distando entre as rodas 2,0 m e seus eixos distantes 1,50 m entre si, com uma área de ocupação de 18 m<sup>2</sup>. A carga  $P$  totaliza 75 kN por roda e a carga  $p$  consiste em um carregamento distribuído de 5 kN/m<sup>2</sup>, conforme mostrado na Figura 17.

Figura 17 - Trem-tipo NBR 7188 (ABNT, 2013)



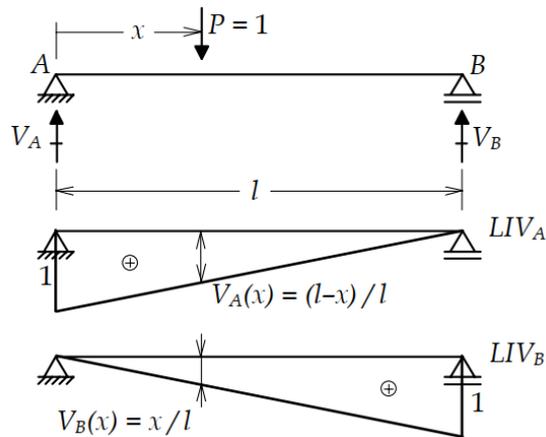
Fonte: NBR 7188 (ABNT, 2013)

## 2.6 Linhas de Influência

O trem-tipo deve ser posicionado nos pontos da estrutura que gerem os efeitos mais críticos. A identificação desses pontos, entretanto, não é uma tarefa intuitiva em muitos casos. Uma forma de identificar as posições que geram o máximo efeito elástico quando a carga transita na estrutura é através das linhas de influência.

De acordo com Sussekind (1981), linha de influência de um efeito elástico em uma seção qualquer é a representação gráfica do valor deste efeito (máximos e mínimos momentos fletores, forças cortantes e reações de apoio) produzido por uma carga unitária, de cima para baixo, transitando sobre a estrutura (Figura 18). Com isso, a linha de influência descreve a variação de um determinado efeito em função da posição da carga unitária.

Figura 18 - Linhas de Influência de reações de apoio

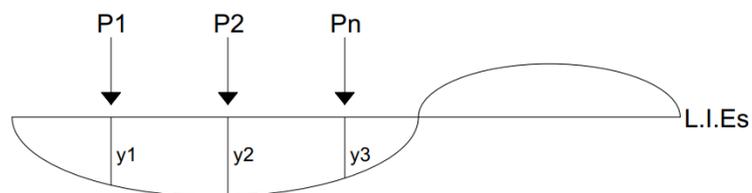


Fonte: Martha (2017)

Segundo Sussekind (1981), para o cálculo do efeito do trem-tipo são determinadas duas cargas: cargas concentradas e cargas uniformemente distribuídas. A Figura 19 mostra um trem-tipo constituído pelas cargas concentradas  $P_1, \dots, P_n$ . O efeito dessas cargas pode ser obtido multiplicando o seu valor pela respectiva ordenada  $y$  da linha de influência. Sendo assim, o efeito total gerado pelas forças concentradas será dado por  $E_s = \sum(P_i y_i)$ . O efeito da carga distribuída  $q$  (Figura 20) pode ser considerado pela carga, conforme a Equação (5):

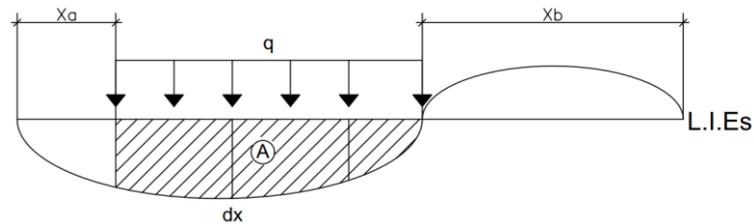
$$E_s = \int_{x_a}^{x_b} q \cdot y(x) dx \quad (5)$$

Figura 19 - Trem-tipo com cargas concentradas



Fonte: Adaptado de Sussekind (1981)

Figura 20 - Trem-tipo com cargas uniformemente distribuídas



Fonte: Adaptado de Sussekind (1981)

Pfeil (1979) afirma que em consequência do princípio da superposição, a solicitação total compreendida para a estrutura consiste somar os efeitos provenientes das cargas concentradas e das cargas distribuídas, resultando em  $E_s = \Sigma (P_i y_i + qA)$ .

## 2.7 Trens-tipo de flexão para pontes rodoviárias

Segundo Mendes (2017) em pontes podem existir vários trens-tipo de flexão para pontes rodoviárias, são eles: trens-tipo de flexão de seções transversais com laje inferior; dotadas de duas vigas principais sem laje inferior e por último, seções transversais dotadas de vigas múltiplas sem laje inferior.

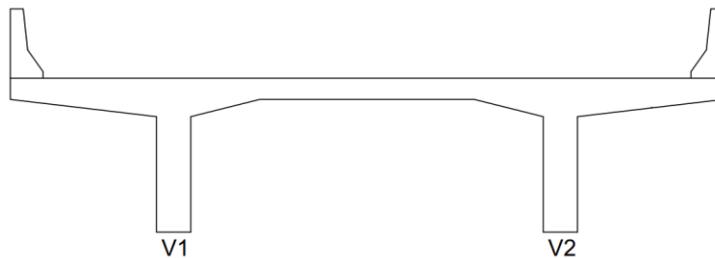
O autor afirma que o fato de existir a laje inferior em ponte com seção transversal em caixão celular, o conjunto apresentará uma grande rigidez à torção e toda análise realizada é levando em consideração a seção integral. Entretanto, ao desconsiderar a laje inferior, a análise de cada viga principal ocorre de forma separada, obtendo trem-tipo para cada viga de forma isolada.

Quando a ponte consiste em vigas múltiplas ligadas entre si por meio das transversinas, o conjunto tabuleiro e vigamento (principal e secundário) torna-se uma grelha de malha ortogonal, cujo cálculo é bastante dispendioso e complexo, com isso, métodos foram desenvolvidos com o intuito de mitigar essa dificuldade e propor a realidade do fenômeno físico do mesmo (MENDES, 2017).

## 2.8 Obtenção do trem-tipo por meio das linhas de influência

Segundo Mendes (2017), pode-se admitir que uma ponte com duas vigas longarinas seja representada como apoios simples que sustentam o tabuleiro (Figura 21). Essa premissa só é válida desde que os apoios sejam considerados rígidos o suficiente. Com isso, as linhas de influência são determinadas em cada corte e serão aplicadas as cargas estabelecidas pela NBR 7188 (ABNT, 2013).

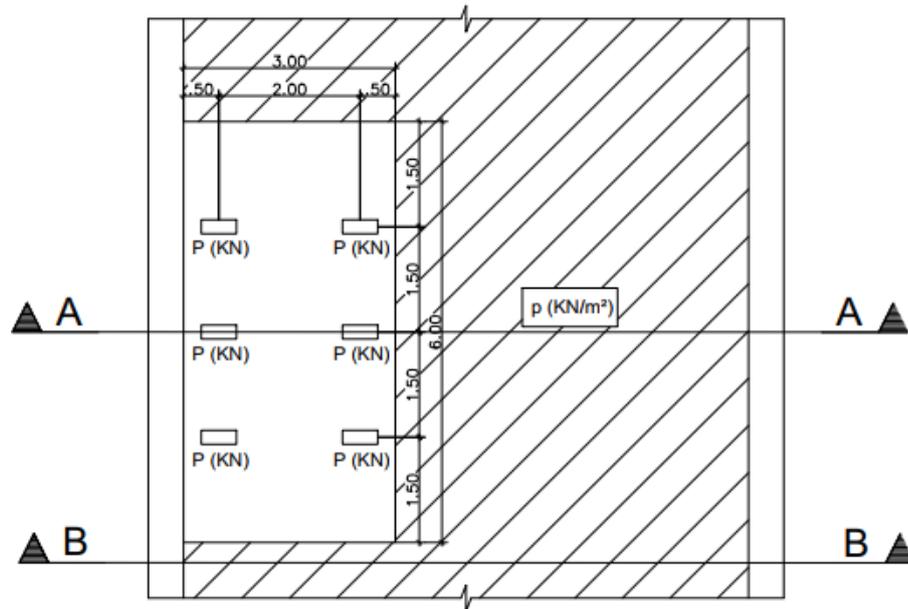
Figura 21 - Seção transversal de uma ponte com duas vigas principais sem laje inferior



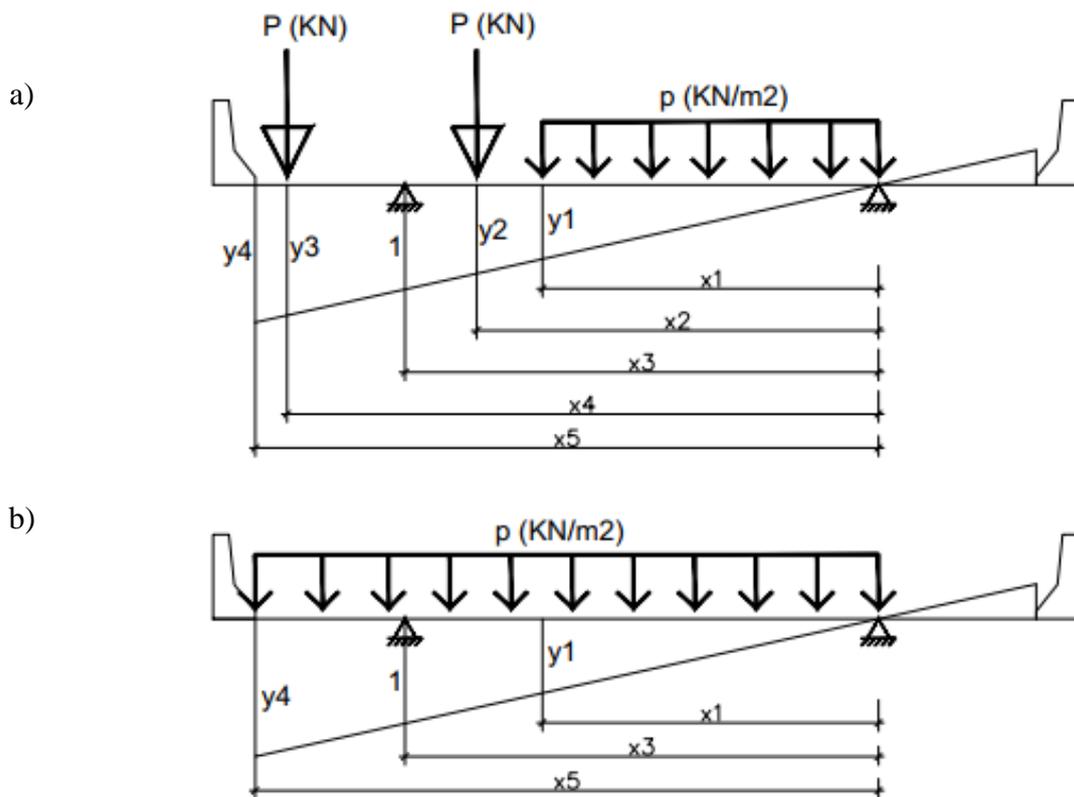
Fonte: Adaptado de Mendes (2017)

Para se obter o trem-tipo é necessário dispor o veículo-tipo em qualquer parte da seção transversal e preencher o restante da pista de rolamento com o carregamento uniformemente distribuído  $p$ , em todos os sentidos da pista. Posteriormente, são analisados dois cortes transversais sobre esses carregamentos, um corte passando por dentro do veículo-tipo e outro passando por fora do veículo-tipo (Figura 22). Com isso, serão determinados os carregamentos provenientes das rodas e do carregamento lateral (Figura 22-a) e dos carregamentos que surgem à frente e atrás do veículo (Figura 22-b).

Figura 22- Cortes sobre o tabuleiro



Fonte: Adaptado NBR 7188 (ABNT, 2013)



Fonte: Adaptado de Mendes (2017)

Para proceder com o cálculo do trem-tipo é necessário determinar os valores de cada “y” na linha de influência. Sabendo que o valor no apoio a ser analisado é 1,00, por

semelhança de triângulos, facilmente determina-se os outros valores, como pode ser observado pelas Equações (6) a (9):

$$y1 = (1 * x1)/x3 \quad (6)$$

$$y2 = (1 * x2)/x3 \quad (7)$$

$$y3 = (1 * x4)/x3 \quad (8)$$

$$y4 = (1 * x5)/x3 \quad (9)$$

Os valores de “x” são encontrados de acordo com a disposição do veículo-tipo no tabuleiro. Com os valores de “y” determinados, faz-se o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão na viga longarina.

1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:

- Reação devida à carga  $P = 75$  kN:

$$RP = P (y2 + y3) \text{ (kN)}$$

- Reação devida ao carregamento  $p = 5$  kN/m<sup>2</sup>:

$$R_{p1} = p \left( \frac{y1 \cdot x1}{2} \right) \text{ (kN/m)}$$

2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:

- Reação devida à carga  $p = 5$  kN/m<sup>2</sup> ao lado do veículo:

$$R_{p1} = p \left( \frac{y1 \cdot x1}{2} \right) \text{ (kN/m)}$$

- Reação devida à carga  $p = 5$  kN/m<sup>2</sup> à frente e atrás do veículo:

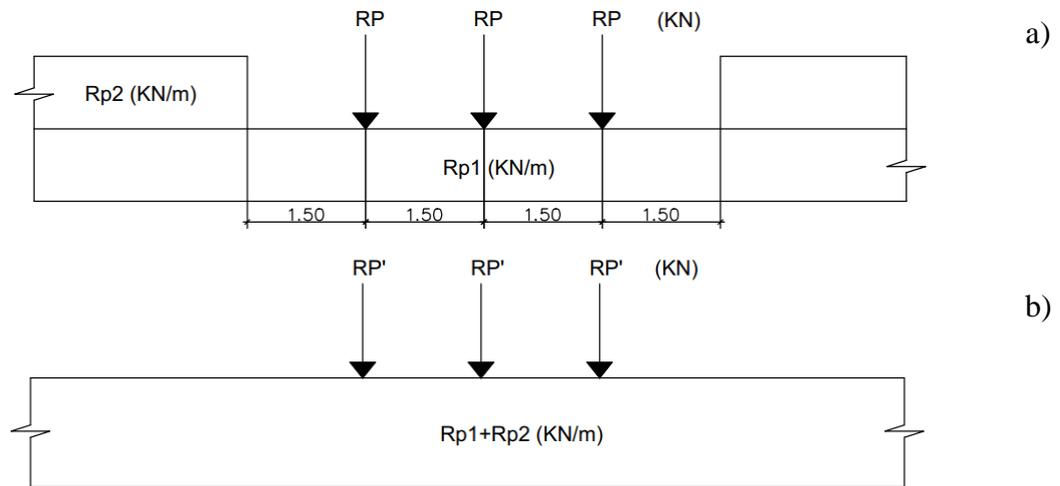
$$R_{p2} = 3p \left( \frac{y4 + y1}{2} \right) \text{ (kN/m)}$$

Com os resultados dispostos, pode-se montar o trem-tipo longitudinal de flexão para uma longarina (Figura 23-a). Posteriormente, pode-se fazer a simplificação do trem-tipo (Figura 23-b). De acordo com Mendes (2017) é preenchido o espaço vazio da faixa de 6 metros, efetuando uma subtração deste carregamento resultante das cargas concentradas, conforme Equações (10) e (11):

$$\Delta RP = \frac{Rp2 \times 6}{3} \quad (10)$$

$$RP' = RP - \Delta RP \quad (11)$$

Figura 23 - Trem-tipo longitudinal de flexão



Fonte: Adaptado de Mendes (2017)

## 2.9 Obtenção do trem-tipo a partir dos coeficientes de repartição transversal pelo método Guyon-Massonet

Quando a ponte consiste em vigas múltiplas ligadas entre si por meio das transversinas, o conjunto tabuleiro e viga (principal e secundário) torna-se uma grelha de malha ortogonal, cujo cálculo é bastante dispendioso e complexo, com isso, métodos foram desenvolvidos com o intuito de mitigar essa dificuldade e propor a realidade do fenômeno físico do mesmo (MENDES, 2017).

De acordo com Mendes (2017), o método de Guyon-Massonet consiste em um tabuleiro com vigas longarinas e transversinas dispostas de forma a constituir fisicamente uma estrutura intermediária entre a laje ortótropa e uma grelha com vinculação rígida à torção entre os seus elementos componentes.

Alves (1994) atribui algumas considerações para a teoria das lajes ortotrópicas, são elas: a espessura da placa é constante e pequena em relação às demais dimensões; as deformações são puramente elásticas, obedecem a lei de Hooke e os deslocamentos são pequenos em relação à espessura da laje; pontos alinhados segundo uma normal à superfície média da laje indeformada encontram-se também linearmente dispostos em uma normal à superfície média na configuração deformada; pontos situados na superfície média da laje deslocam-se somente normalmente à mesma; admite-se que as propriedades elásticas sejam constantes, podendo ser diferentes nas duas direções ortogonais.

Para viabilizarem o cálculo por esse método, Guyon e Massonnet utilizaram de tabelas e gráficos, os quais podem encontrar os índices de repartição transversal  $X\varphi$ , que depende dos seguintes parâmetros:

- Coeficiente de travejamento  $\theta$  definido pela Equação (12):

$$\theta = \frac{b}{L} \sqrt[4]{\frac{\rho x}{\rho y}} \quad (12)$$

sendo,

$b$  = semi-largura da placa equivalente

$L$  = comprimento da placa equivalente

$\rho x$  e  $\rho y$  = definidos

- Parâmetro de torção  $\varphi$  definido pela Equação (13):

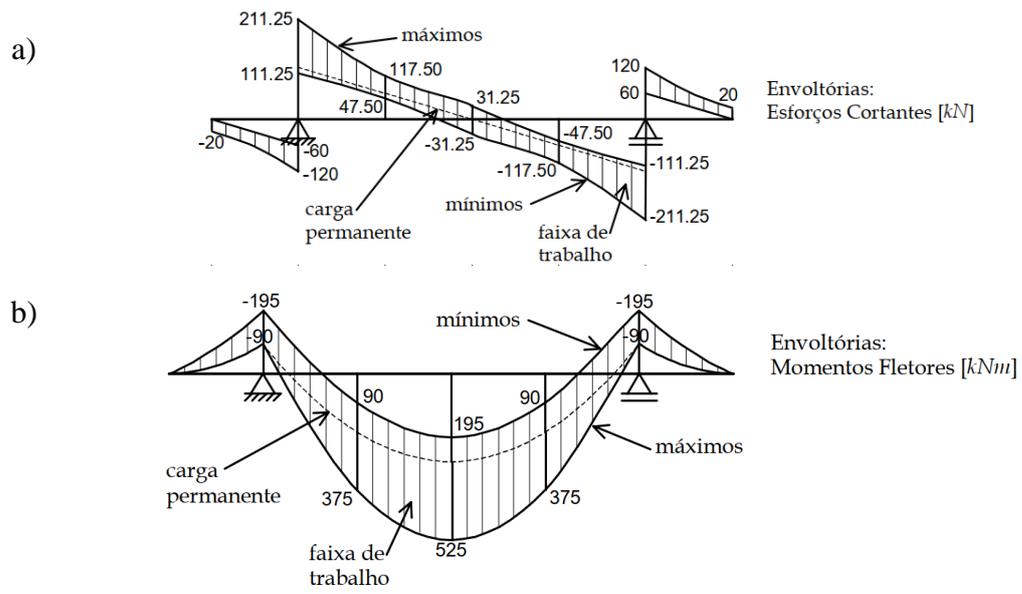
$$\varphi = \frac{\rho x + \rho y}{2\sqrt{\rho x \cdot \rho y}} \quad (13)$$

## 2.10 Envoltórias de Esforços

Segundo Martha (2017) as envoltórias limites de esforços descrevem, para um conjunto de cargas móveis ou acidentais, os valores máximos e mínimos de um esforço qualquer em cada uma das seções da estrutura.

De acordo com Pfeil (1979) para estruturas mais simples, é possível determinar onde o carregamento irá provocar solicitações mais desfavoráveis para cada seção. Entretanto, nos casos mais complexos, são empregadas as linhas de influência, possibilitando calcular os valores de cada solicitação, com esses valores são traçadas linhas de envoltórias das solicitações de carga móvel, as quais irão descrever os valores máximos e mínimos de cada esforço, seja esforço cortante (Figura 24-a) ou esforço de momento fletor (Figura 24-b).

Figura 24 - Envoltórias de esforços



Fonte: Martha (2017)

### 3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste trabalho, o estudo dos métodos simplificados usados na obtenção das envoltórias de esforços das vigas longarinas de pontes será feito mediante modelos implementados no Ftool, enquanto o modelo baseado em elementos finitos será concebido no *software SAP2000*.

O Ftool, *software* gratuito idealizado pelo professor Luiz Fernando Martha do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, é uma ferramenta computacional responsável por auxiliar no ensino do comportamento estrutural de pórticos planos. O mesmo é uma ferramenta de interface intuitiva que permite a análise estrutural de maneira rápida de estruturas simples à complexas.

O *software* SAP2000 (*Structural Analysis Program*) é uma das ferramentas baseadas no Método dos Elementos Finitos mais difundidas no âmbito da engenharia. O manual do SAP2000 prescreve que o *software* pode ser utilizado, entre outras, para análise estática e dinâmica, linear e não linear, análise de cargas de veículos em pontes (trens-tipo), diversidade nos tipos de carregamentos, consideração da não-linearidade geométrica e inclui os efeitos de fluência e retração, resultando em aproximações consistentes com a realidade da estrutura.

O SAP2000 utiliza para simular elementos lineares é o elemento denominado *frame*, que utiliza a formulação tridimensional de viga/coluna, responsável pelos efeitos de flexão biaxial, torção, deformação axial e deformação por cisalhamento biaxial. Este elemento é configurado definindo uma seção transversal e o tipo de vinculação nos nós extremos, sendo cada nó composto por seis graus de liberdade (deslocamentos nas três direções e rotações em torno dos três eixos) (LIMA, 2013). Sendo assim, para este trabalho, esse elemento será usado para simular as vigas longarinas e transversinas da ponte.

O elemento responsável por simular elementos planos é do tipo *Shell*. Este combina o comportamento de membrana e de placa, sendo útil na modelagem de placas, chapas e cascas. Estão disponíveis elementos *Shell* com 3 nós (triangular) e 4 nós (quadrilateral), tendo cada nó, da mesma forma que o elemento *frame*, seis graus de liberdade. O *software* utiliza como padrão a formulação de placas finas (Teoria de Kirchhoff), que negligencia o efeito do cisalhamento. Pode-se, no entanto, optar por utilizar a formulação de placas espessas (Teoria de Mindlin/Reisner) (BEZERRA, 2015). No caso deste trabalho, será utilizado este elemento para simular o tabuleiro da ponte.

### 3.1 Descrição do modelo

Para este trabalho, foram analisadas as envoltórias de esforços das vigas longarinas em nove modelos, com o intuito de verificar a influência da rigidez nos resultados dos esforços internos.

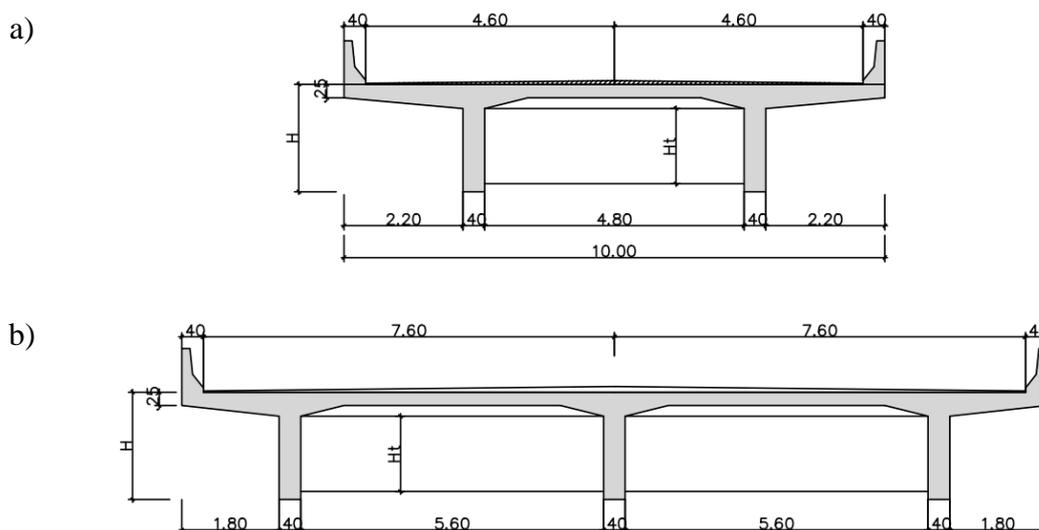
Nas três primeiras situações foram modeladas pontes com seção transversal de duas vigas longarinas (Figura 25-a), estas terão suas alturas variando entre 2m a 3,50m, a obtenção do trem-tipo será por meio do método das linhas de influência.

Nas outras seis situações serão analisadas pontes com seção transversal dotadas de três vigas longarinas (Figura 25-b), as alturas irão variar de 2m a 3,50m, o método de obtenção do trem-tipo será por meio dos coeficientes de repartição transversal pelo método de Guyon-Massonnet.

No cálculo para obtenção do trem-tipo foram considerados para todos os modelos as cargas de peso próprio da estrutura, guarda-roda, revestimento e o veículo-tipo percorrendo toda a estrutura. Vale destacar que no SAP2000 as cargas verticais provenientes dos eixos do veículo-tipo vão até o guarda-roda, situação que não acontece com o método simplificado, o qual considerado uma distância de 0.50m do guarda-roda.

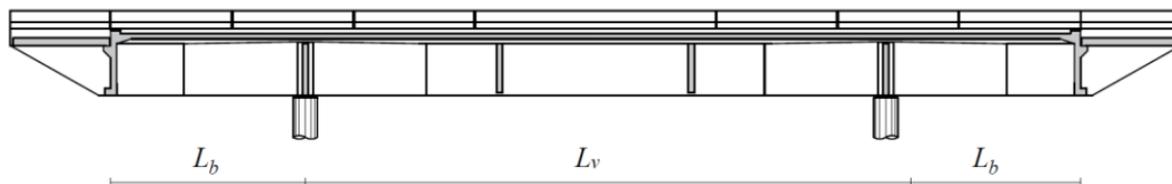
A ponte analisada é composta de vigas principais, também chamadas de longarinas, com altura  $h$  variando entre 2,00m a 3,50m. As dimensões da seção transversal estão representadas na Figura 25. A vista lateral é apresentada na Figura 26 e possui as seguintes dimensões  $L_b = 7,50\text{m}$  e  $L_v = 25,00\text{m}$ .

Figura 25 - Seções transversais das pontes



Fonte: Adaptado de Mendes (2017)

Figura 26 - Corte longitudinal da ponte analisada

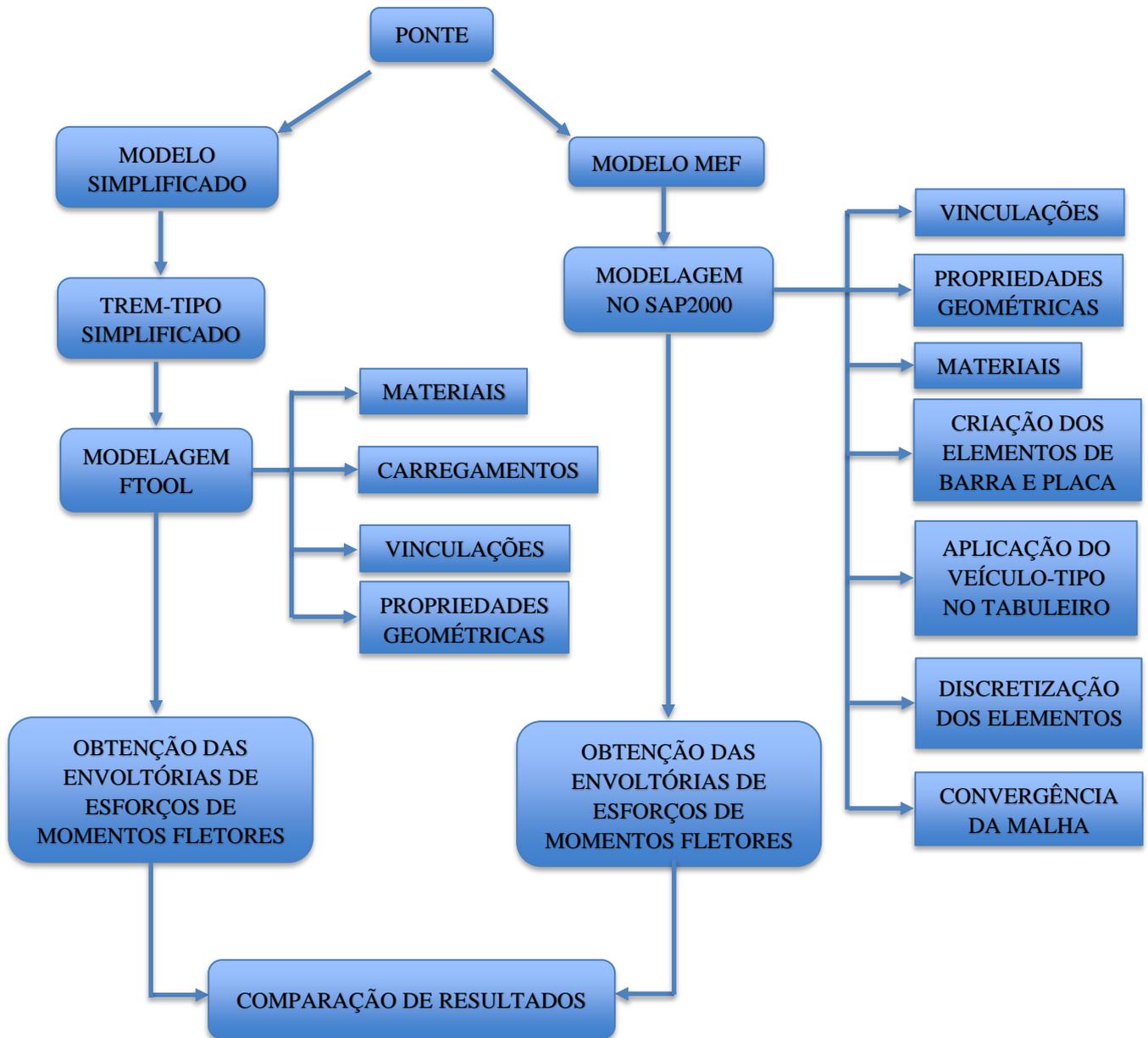


Fonte: Santos e Matias (2019)

Por meio do passo a passo de cálculo apresentado na Seção 2.8, pode-se obter o trem-tipo de flexão simplificado das vigas longarinas que serão modelas no Ftool. Conforme já discutido, a definição do trem-tipo de flexão das vigas longarinas será feita admitindo que cada uma destas funciona como um apoio simples para o tabuleiro. Entretanto, é sabido que as vigas são deformáveis e essa aproximação pode ter impacto na qualidade da resposta. Para investigar a influência da rigidez das vigas na resposta obtida via Elementos Finitos, serão testadas diversas alturas para as vigas. Espera-se com essa análise identificar se os resultados das envoltórias de esforços serão significativamente afetados por esse pressuposto ou se esta é uma aproximação aceitável.

Com base na Figura 27, o fluxograma representa os procedimentos para a modelagem do trem-tipo para cada modelo a ser estudado neste trabalho.

Figura 27 - Fluxograma de modelagem do trem-tipo



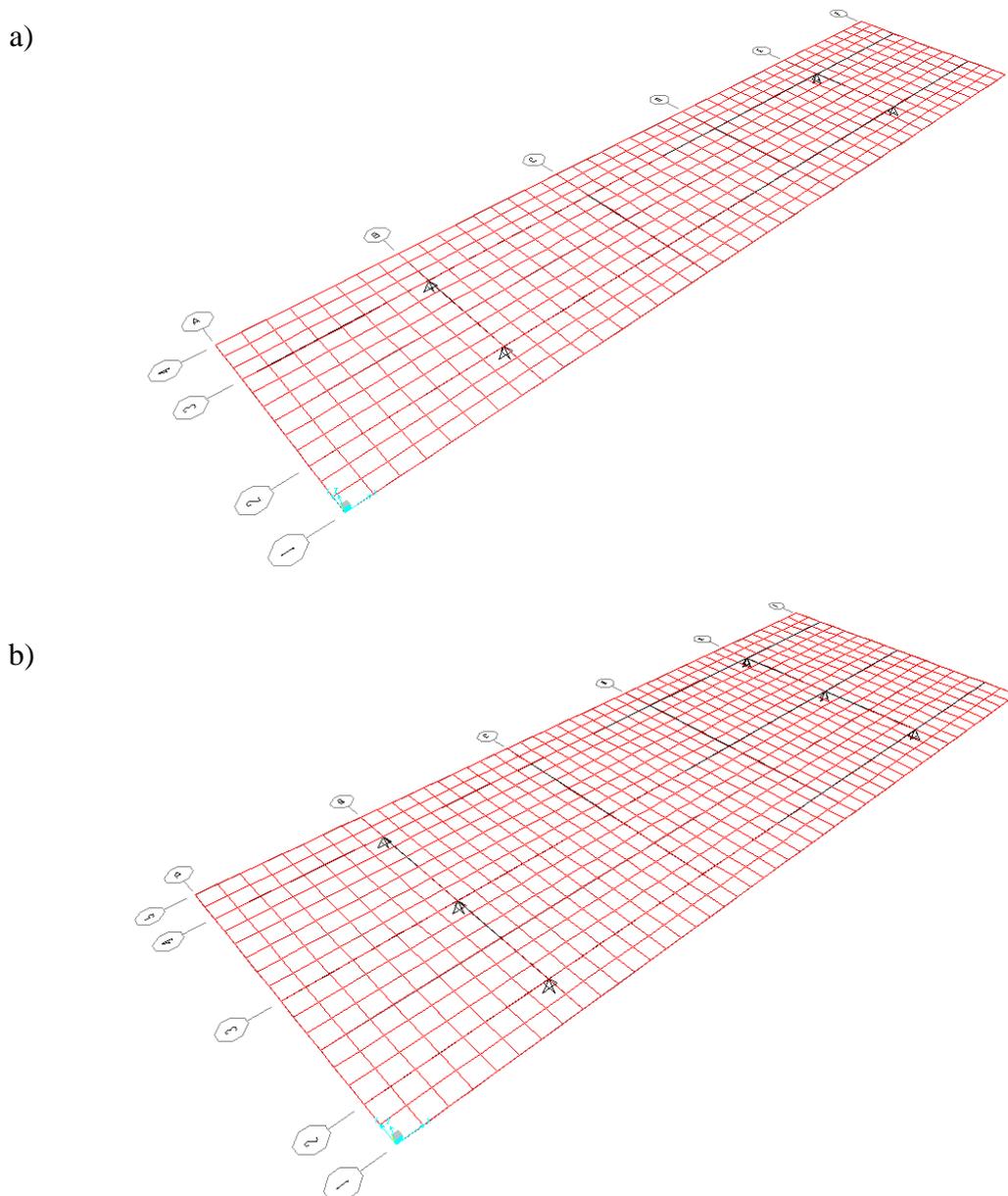
Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados todos os parâmetros utilizados na realização dos cálculos para obtenção dos esforços solicitantes. A ponte rodoviária a ser analisada pertence a classe 45, a seção transversal está descrita na Seção 3.1.

A malha de elementos finitos utilizada foi do tipo *shell* com 1.00m. A Figura 28 representa a malha para as pontes dotadas de duas vigas e pontes de vigas múltiplas.

Figura 28 - Malha de elementos finitos no SAP2000 para pontes de a) duas vigas e b) vigas múltiplas



## 4.1 Carregamentos nas pontes

Para obtenção dos esforços internos de uma ponte é necessário determinar as ações que atuarão nos elementos estruturais. Com isso, essas ações podem ser oriundas de cargas permanentes e cargas acidentais NBR 6120 (ABNT, 2019).

### 4.1.1 Carregamento permanente

As cargas permanentes utilizadas neste trabalho foram: peso próprio da laje, das vigas longarinas, das vigas transversinas e da carga de pavimentação.

Abaixo seguem os valores dos pesos específicos dos materiais utilizados no cálculo do carregamento da ponte rodoviária:

- Peso específico do concreto armado ( $\gamma_c$ ): 25 kN/m<sup>3</sup>
- Peso específico do revestimento ( $\gamma_{rev}$ ): 24 kN/m<sup>3</sup>
- Peso específico do aterro ( $\gamma_{aterro}$ ): 18 kN/m<sup>3</sup>

Em seguida, serão realizados os cálculos para determinar a parcela de carga que irá incidir em cada viga longarina. Nos itens abaixo estão expostas as equações para determinação de cada carga na viga longarina:

- a) Peso da carga permanente devido ao peso próprio do conjunto viga longarina-tabuleiro-barreira ( $g_1$ ):

$$g_1 = A_1 \times \gamma_c$$

- b) Peso da carga permanente devido ao peso próprio do revestimento ( $g_2$ ):

$$g_2 = A_2 \times \gamma_{rev}$$

- c) Peso da carga permanente devido ao peso próprio da viga transversina ( $P_{vt}$ ):

$$P_{vt} = b_{vt} \times H_{vt} \times (L_{vt}/2) \times \gamma_c$$

- d) Peso da carga permanente devido ao peso próprio dos elementos do encontro ( $P_{enc}$ ):

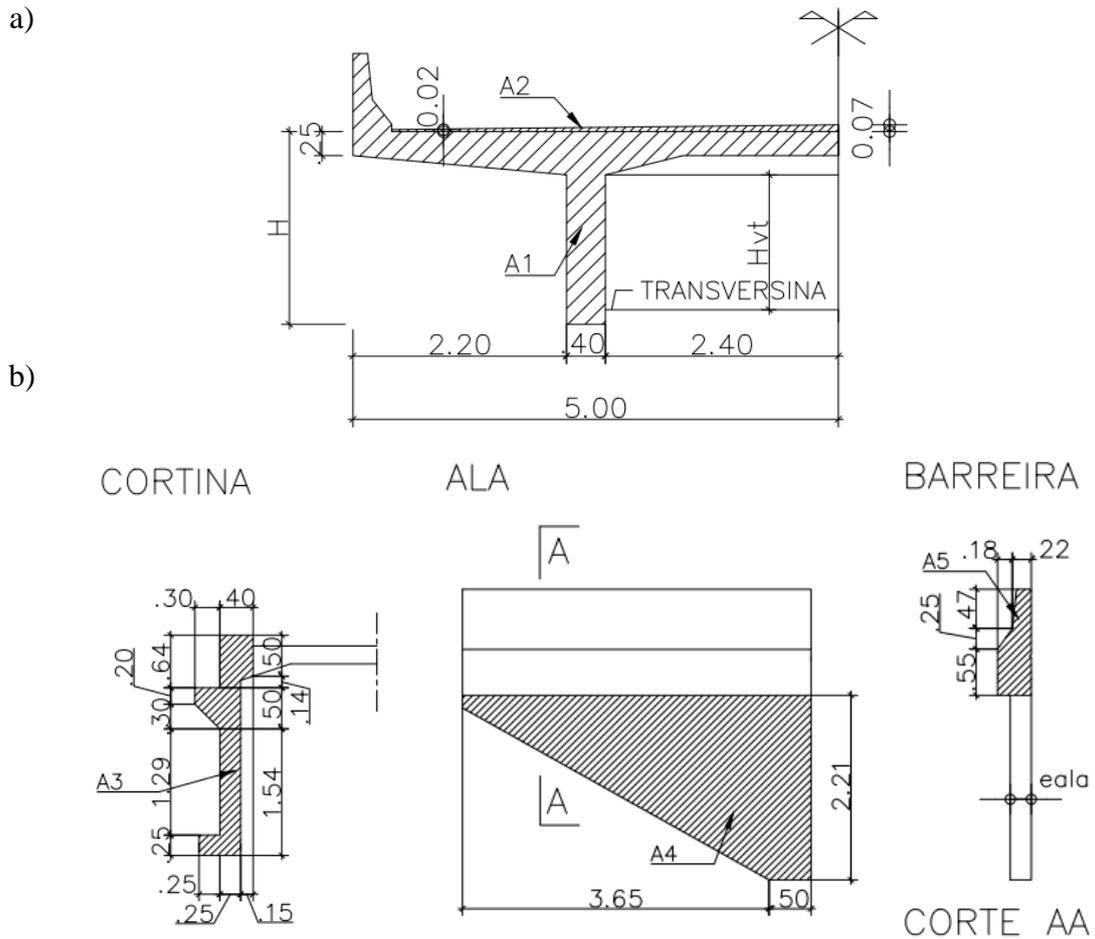
$$P_{enc} = A_3 \times (L/2) \times \gamma_c + A_4 \times e_{ala} \times \gamma_c + A_5 \times B \times \gamma_c + A_6 \times (L_{placa}/2) \times \gamma_c + A_7 \times (L_{placa}/2)$$

$\times \gamma_{aterro}$

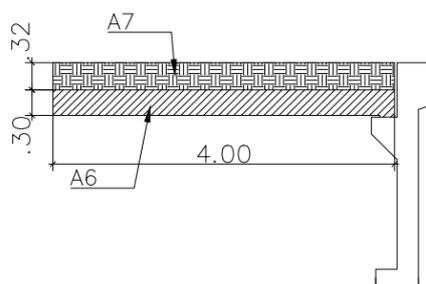
4.1.1.1 Cargas permanentes das vigas longarinas para ponte dotada de duas vigas

Na Figura 29 estão apresentadas as áreas dos elementos para obtenção do peso próprio para as pontes analisadas. A Figura 29-a representa a seção transversal do eixo da ponte rodoviária dotada de duas vigas, sendo descritas as áreas correspondentes do conjunto viga longarina-laje-barreira e do revestimento. A Figura 29-b representa os elementos do encontro da ponte em, com as áreas da cortina, da barreira, da ala, da placa de transição e do aterro, vale destacar que esses elementos serão os mesmo utilizados para ponte de vigas múltiplas.

Figura 29 - Áreas dos elementos estruturais para ponte dotada de duas vigas



## PLACA DE TRANSIÇÃO/ATERRO



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 3 apresenta todas as áreas utilizadas na ponte rodoviária dotada de duas vigas longarinas com altura (H) de 2.00m.

Tabela 3 - Áreas dos elementos estruturais da ponte em m<sup>2</sup>

A1	2.44
A2	0.21
A3	0.92
A4	5.41
A5	0.39
A6	1.20
A7	1.28

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 4 apresentam as dimensões das vigas transversinas utilizadas na ponte rodoviária dotada de duas vigas longarinas com altura (H) de 2.00m.

Tabela 4 - Dimensões das vigas transversinas em m

bvt	0.25
Hvt	1.40
Lvt/2	2.40

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

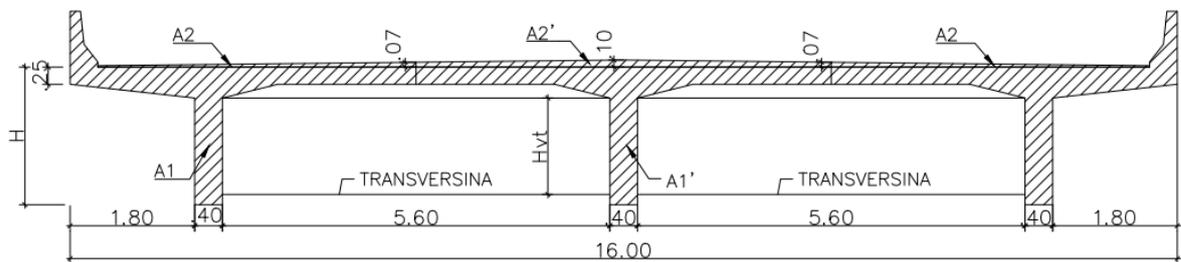
De forma análoga para as outras alturas das vigas longarinas, serão alteradas apenas A1 e Hvt, pois as outras áreas permanecem inalteradas. Portanto, para as vigas com altura (H)

de 3.00m, A1 e Hvt, são respectivamente: 2.84m<sup>2</sup> e 2.40m. Assim como para as vigas com altura (H) de 3.50m, A1 e Hvt, são respectivamente: 3.04m<sup>2</sup> e 2.90m.

4.1.1.2 Cargas permanentes das vigas longarinas para ponte de vigas múltiplas

Na Figura 30 estão apresentadas as áreas dos elementos referentes as vigas externas e internas para obtenção do peso próprio para as pontes analisadas. A Figura 30-a e a Figura 30-b representam a seção transversal do eixo da ponte rodoviária de vigas múltiplas, destacando-se as áreas referentes as vigas externas e vigas internas, respectivamente, sendo descritas as áreas correspondentes do conjunto viga longarina-laje-barreira e do revestimento.

Figura 30 - Áreas dos elementos estruturais para ponte de vigas múltiplas



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 5-a e a Tabela 5-b apresentam todas as áreas utilizadas na ponte rodoviária de vigas múltiplas para vigas externas e vigas internas, respectivamente, com altura (H) de 2.00m.

Tabela 5 - Áreas dos elementos estruturais da ponte em m<sup>2</sup>

a)			b)		
	A1	2.40		A1'	2.36
	A2	0.21		A2'	0.52
	A3	0.92		A3	0.92
	A4	5.41		A4	5.41
	A5	0.39		A5	0.39
	A6	1.20		A6	1.20
	A7	1.28		A7	1.28

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 6 apresentam as dimensões das vigas transversinas utilizadas na ponte rodoviária de vigas múltiplas com altura (H) de 2.00m.

Tabela 6 - Dimensões das vigas transversinas em m

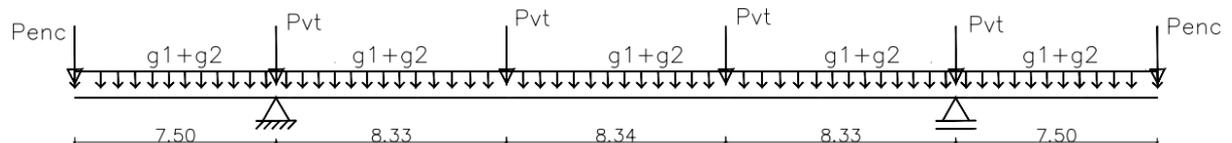
bvt	0.25
Hvt	1.40
Lvt/2	2.80

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

De forma análoga para as outras alturas das vigas longarinas, serão alteradas apenas A1, A1' e Hvt, pois as outras áreas permanecem inalteradas. Portanto, para as vigas com altura (H) de 3.00m, A1, A1' e Hvt, são respectivamente: 2.80m<sup>2</sup>, 2.76m<sup>2</sup> e 2.40m. Assim como para as vigas com altura (H) de 3.50m, A1, A1' e Hvt, são respectivamente: 3.00m<sup>2</sup>, 2.96m<sup>2</sup> e 2.90m.

Com todos os carregamentos permanentes definidos, pode-se determinar o modelo no Ftool, conforme Figura 31.

Figura 31 - Cargas permanentes das vigas longarinas



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

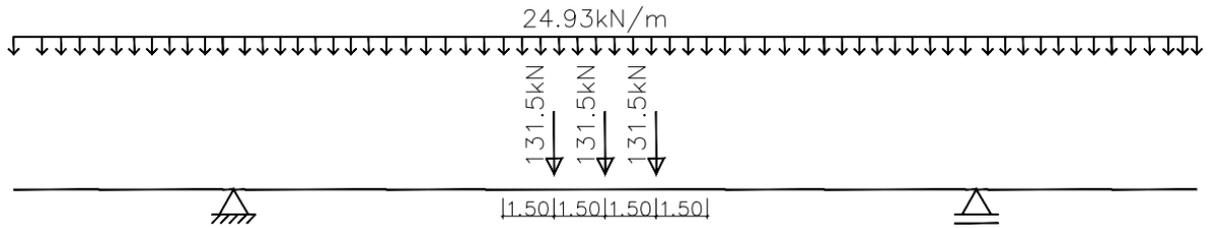
#### 4.1.2 Carregamento móvel

As cargas móveis utilizadas para a ponte em estudo são estabelecidas pela NBR 7188 (ABNT, 2013). Para obtenção das cargas que irão atuar na viga longarina analisada utilizou-se o método das linhas de influência de reação de apoio.

##### 4.1.2.1 Cargas móveis das vigas longarinas para ponte dotada de duas vigas

Na Seção 2.8 é demonstrado o passo a passo de cálculo para determinação do trem-tipo longitudinal de flexão das vigas longarinas para uma ponte rodoviária dotada de duas vigas, conforme Figura 32.

Figura 32 - Trem-tipo simplificado de flexão para ponte dotada de duas vigas



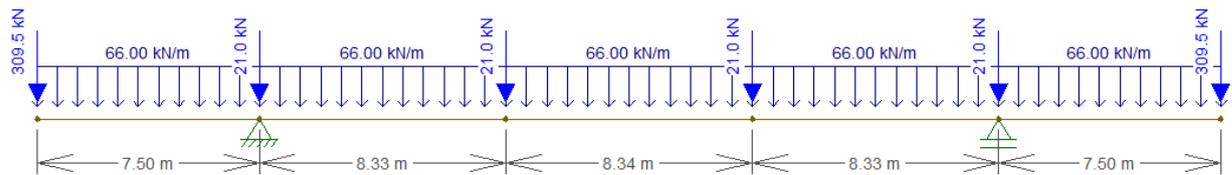
Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

#### 4.2 Esforços solicitantes para ponte dotada de duas vigas

Nesta seção serão apresentados os diagramas das envoltórias de esforços dos momentos fletores para cada modelo de ponte com auxílio dos softwares Ftool e SAP2000.

Com base no roteiro de cálculo para obtenção das cargas permanentes, a Figura 33 demonstra o carregamento para ponte dotada de duas vigas com altura (H) de 2.00m.

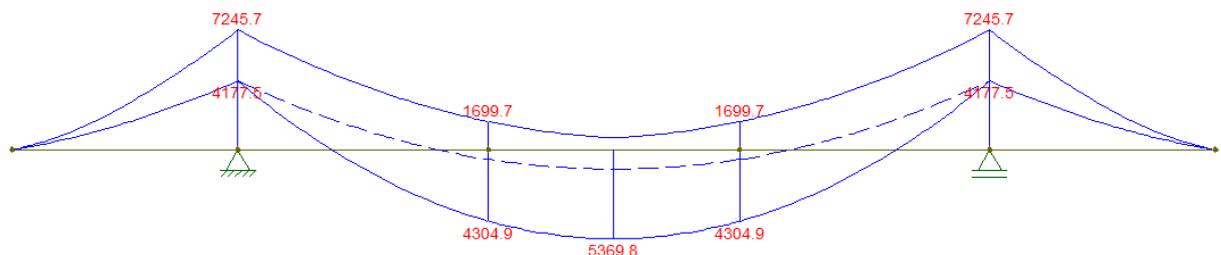
Figura 33 - Cargas permanentes para ponte dotada de duas vigas, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Combinando as cargas permanentes com as cargas móveis citadas na Seção 4.1.2.1, obtém-se a seguinte envoltória de esforços de momento fletor (Figura 34):

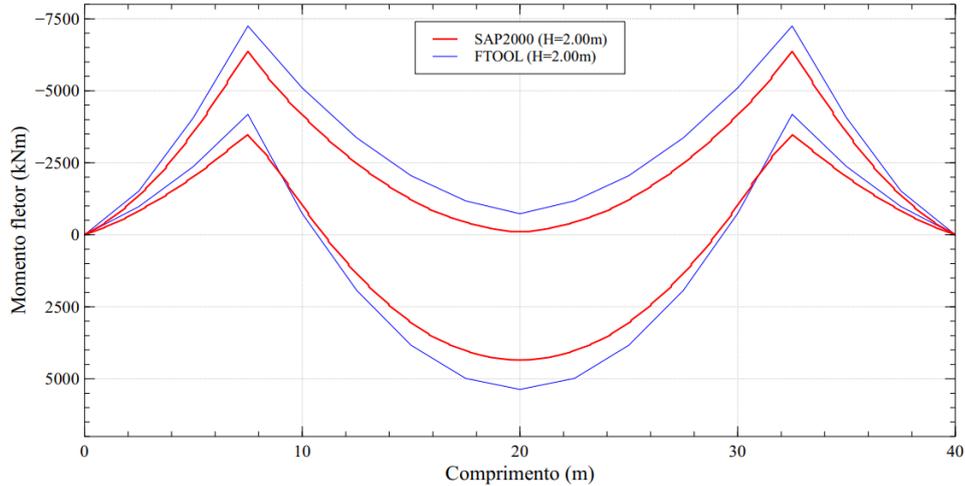
Figura 34 - Envoltória de momento fletor para ponte dotada de duas vigas, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 35 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para ponte dotada de duas vigas com H=2.00m.

Figura 35 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 7 mostra que a altura de 2.00m da viga longarina representa baixa rigidez em comparação com o modelo do Ftool. Para obtermos um parâmetro quanto a relação (R%) dos métodos, deve-se proceder a Equação (4).

$$R (\%) = \frac{MF_{\text{tool}} - MS_{\text{SAP2000}}}{MF_{\text{tool}}} \times 100 \quad (14)$$

Tabela 7 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000, (H=2.00m)

Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	5369.8	-7245.7
SAP2000 (H=2.00m)	4343.7	-6371.0

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos de uma ponte dotada de duas vigas com altura H=2.00m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{5369.8 - 4343.7}{5369.8} \times 100$$

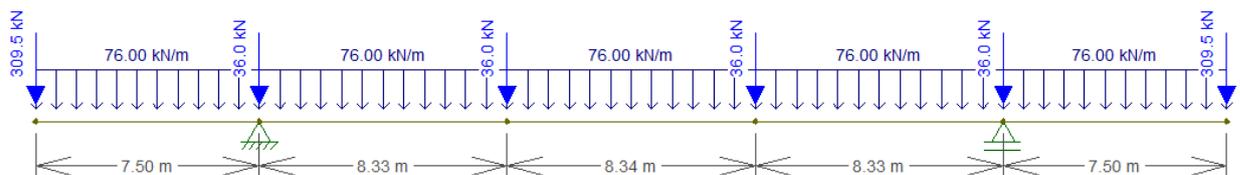
$$R_{\text{máx}} (\%) = 19.11\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{7245.4 - 6371.0}{7245.7} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = 12.07\%$$

Abaixo segue o carregamento da ponte dotada de duas vigas com altura (H) de 3.00m (Figura 36):

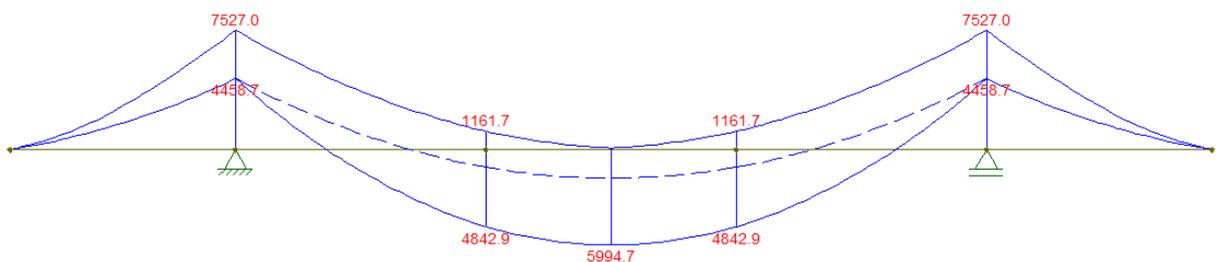
Figura 36 - Cargas permanentes para ponte dotada de duas vigas, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Combinando as cargas permanentes com as cargas móveis citadas na Seção 4.1.2.1, obtém-se a seguinte envoltória de esforços de momento fletor (Figura 37):

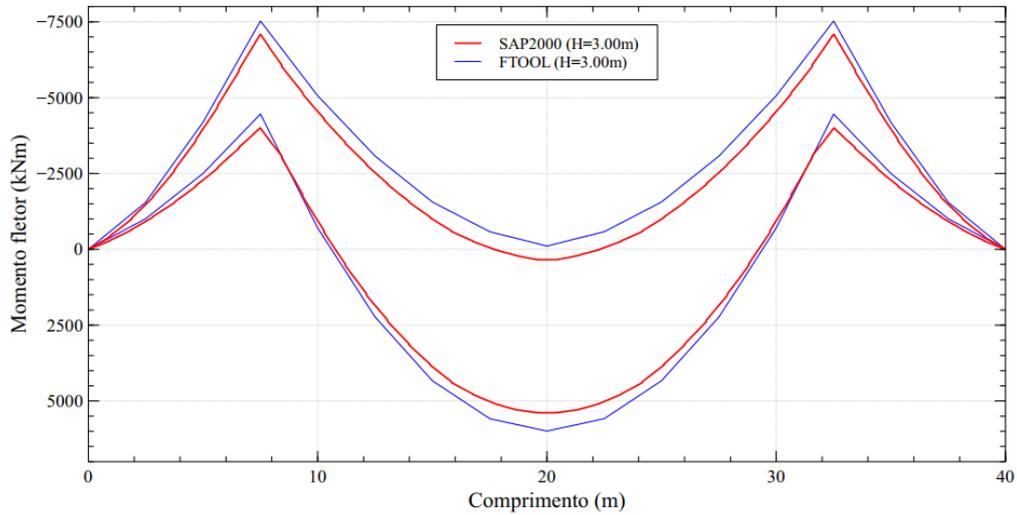
Figura 37 - Envoltória de momento fletor para ponte dotada de duas vigas, (H)=3.00m



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 38 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para ponte dotada de duas vigas com H=3.00m.

Figura 38 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 8 mostra que a altura de 3.00m da viga longarina representa um aumento considerável na rigidez em comparação com o modelo do Ftool. Com base na relação (R%) entre momentos, pode-se perceber isso.

Tabela 8 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000, (H=3.00m)

Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	5994.7	-7527.0
SAP2000 (H=3.00m)	5387.85	-7101.1

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos de uma ponte dotada de duas vigas com altura H=3.00m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{5994.7 - 5387.85}{5994.7} \times 100$$

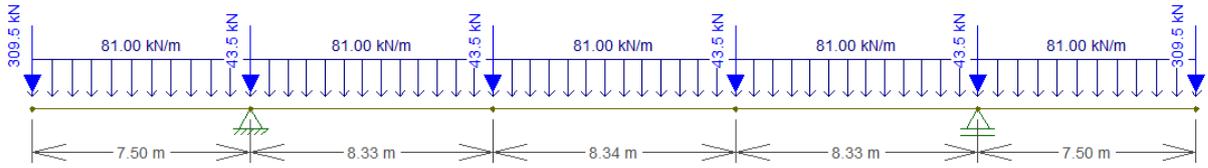
$$R_{\text{máx}} (\%) = 10.12\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{7527.0 - 7101.1}{7527.0} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = 5.66\%$$

Abaixo segue o carregamento da ponte dotada de duas vigas com altura (H) de 3.50m (Figura 39):

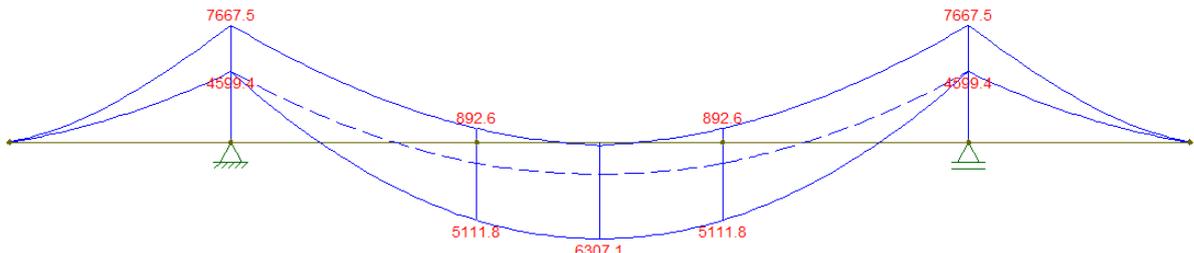
Figura 39 - Cargas permanentes para ponte dotada de duas vigas, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Combinando as cargas permanentes com as cargas móveis citadas na Seção 4.1.2.1, obtém-se a seguinte envoltória de esforços de momento fletor (Figura 40):

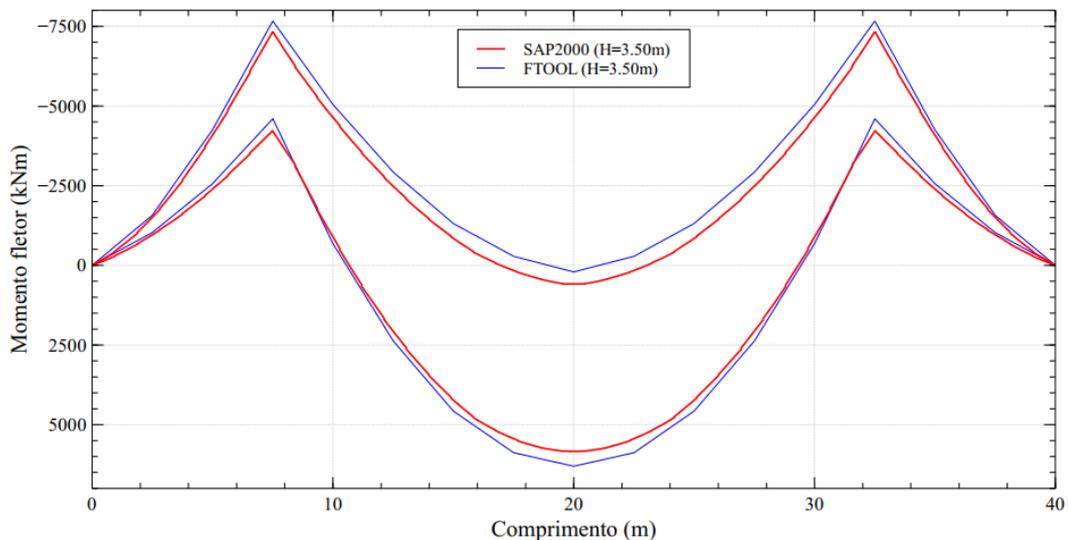
Figura 40 - Envoltória de momento fletor para ponte dotada de duas vigas, (H)=3.50m



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 41 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para ponte dotada de duas vigas com H=3.50m.

Figura 41 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

A Tabela 9 mostra que a altura de 3.50m da viga longarina representa um aumento da rigidez em comparação com o modelo do Ftool, aproximando do resultado obtido pelo método 2D. Com base na relação (R%) entre momentos, pode-se perceber isso.

Tabela 9 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000, (H=3.50m)

Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	6307.1	-7667.5
SAP2000 (H=3.50m)	5833.1	-7339.8

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos de uma ponte dotada de duas vigas com altura H=3.00m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{6307.1 - 5833.1}{6307.1} \times 100$$

$$R_{\text{máx}} (\%) = 7.52\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{7667.5 - 7339.8}{7667.5} \times 100$$

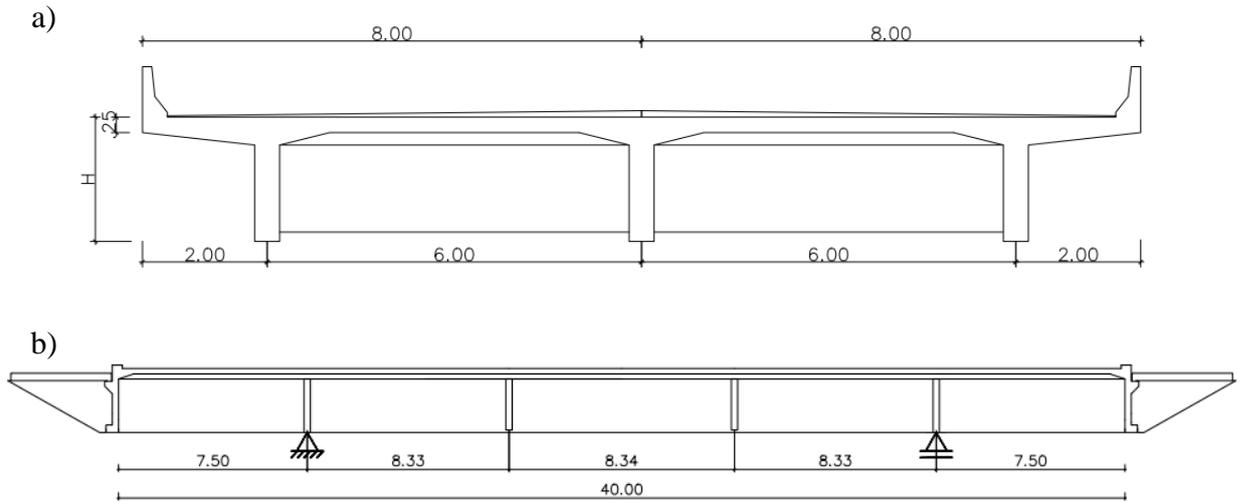
$$R_{\text{mín}} (\%) = 4.27\%$$

Com isso, pode-se perceber que a relação entre momentos fletores ao aumentar a altura da viga, resulta em uma convergência de resultados. Sendo assim, as vigas mais flexíveis (H=2.00m) representam resultados mais divergentes do que comparadas com vigas mais rígidas (H=3.50m). Isto pode ser comprovado pois no método simplificado é considerado rigidez infinita da viga longarina, então ao aumentarmos a rigidez da viga, a tendência é exatamente os resultados se aproximarem.

### 4.3 Esforços solicitantes para ponte de vigas múltiplas

De acordo com Mendes (2017), para determinação do trem-tipo de flexão das vigas longarinas são estabelecidos coeficientes de repartição transversal para cada viga. Para este trabalho, determinou-se a denominação das vigas em: vigas externas e viga interna. O método Guyon-Massonnet leva em consideração os espaçamentos entre as longarinas e as transversinas, conforme Figura 42.

Figura 42 - Seção da ponte a) transversal e b) longitudinal



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

O método utilizado de Guyon-Massonnet também é influenciado pela rigidez à flexão e à torção das vigas longarinas e transversinas, conforme mostrado na Tabela 10.

Tabela 10 - Momentos de Inércia

Momentos de Inércia à flexão							
VIGAS LONGARINAS				VIGAS TRANSVERSINAS			
h (m)	2.00	3.00	3.50	h (m)	1.40	2.40	2.90
b (m)	0.4	0.4	0.4	b (m)	0.25	0.25	0.25
I <sub>long</sub> (m <sup>4</sup> )	0.267	0.900	1.429	I <sub>tran</sub> (m <sup>4</sup> )	0.057	0.288	0.5081

Momentos de Inércia à torção							
VIGAS LONGARINAS				VIGAS TRANSVERSINAS			
h (m)	2.00	3.00	3.50	h (m)	1.40	2.40	2.90
b (m)	0.4	0.4	0.4	b (m)	0.25	0.25	0.25
$\beta$	0.293	0.310	0.317	$\beta$	0.296	0.312	0.316
J <sub>long</sub> (m <sup>4</sup> )	0.0375	0.0596	0.0710	J <sub>tran</sub> (m <sup>4</sup> )	0.0065	0.0117	0.0143

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Foram adotados os seguintes módulos de elasticidade inicial ( $E_{ci}$ ), conforme Equação (14) e módulo de elasticidade transversal ( $G$ ), conforme Equação (15) com  $f_{ck}$  em Mpa e coeficiente de Poisson de 0,2.

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} \quad (14)$$

$$E_{ci} = 5600\sqrt{30} = 30672.46 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (15)$$

$$G = \frac{30672.46}{2(1 + 0.2)} = 12780.19 \text{ MPa}$$

Com base nesses dados, pode-se determinar as rigidezes à flexão e à torção das longarinas e transversinas, conforme descritas as Equações (16) a (19):

$$\rho_{\text{long}} = \frac{E \cdot I_{\text{long}}}{b_o} \quad (16)$$

$$\rho_{\text{tran}} = \frac{E \cdot I_{\text{tran}}}{l_o} \quad (17)$$

$$\gamma_{\text{long}} = \frac{G \cdot J_{\text{long}}}{b_o} \quad (18)$$

$$\gamma_{\text{tran}} = \frac{G \cdot J_{\text{tran}}}{l_o} \quad (19)$$

onde:

$I_{\text{long}}$  = momento de inércia à flexão das vigas longarinas

$I_{\text{tran}}$  = momento de inércia à flexão das vigas transversinas

$J_{\text{long}}$  = momento de inércia à torção das vigas longarinas

$J_{\text{tran}}$  = momento de inércia à torção das vigas transversinas

$b_o$  = espaçamento das vigas longarinas

$l_o$  = espaçamento das vigas transversinas

Abaixo segue a tabela com as rigidezes de todos os elementos a serem analisados (Tabela 11).

Tabela 11 - Rigidezes à flexão e à torção

RIGIDEZES	VIGAS LONGARINAS		
	H=2.00m	H=3.00m	H=3.50m
$\rho_{long}$	1363.22	4600.87	7306.01
$\gamma_{long}$	79.82	126.85	151.26
RIGIDEZES	VIGAS TRANSVERSINAS		
	H=1.40m	H=2.40m	H=2.90m
$\rho_{tran}$	210.50	1060.46	1870.93
$\gamma_{tran}$	9.93	17.93	21.94

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com isso, calcula-se os parâmetros de torção e travamento, expressos pela Equação (20) e Equação (21), respectivamente:

$$\alpha = \frac{\gamma_{long} + \gamma_{tran}}{2 \cdot \sqrt{\rho_{long} \cdot \rho_{tran}}} \quad (20)$$

$$\theta = \frac{b^4}{l} \sqrt{\frac{\rho_{long}}{\rho_{tran}}} \quad (21)$$

sendo,

b = semi-largura da placa equivalente

l = comprimento da placa equivalente

A partir disso, pode-se obter os coeficientes  $\alpha$  e  $\theta$  para cada longarina expressos na Tabela 12.

Tabela 12 - Parâmetros de torção e travamento para cada longarina

Parâmetros	VIGAS		
	H=2.00m	H=3.00m	H=3.50m
$\alpha$	0.084	0.033	0.023
$\theta$	0.3	0.3	0.3

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com os resultados de  $\alpha$  e  $\theta$  é possível determinar os coeficientes de repartição para cada longarina por meio de tabelas que determinam os valores de  $\alpha=0$  e  $\alpha=1$ .

Tabela 13 - Coeficientes de repartição para  $\alpha=0$  e  $\alpha=1$  ( $m_0$  e  $m_1$ )

Valores para $\theta = 0.30$					
Caso $\alpha=0$			Caso $\alpha=1$		
Posição da carga	Posição da viga		Posição da viga		Posição da carga
	0	$3b/4$	0	$3b/4$	
-b	0.942	-1.209	0.966	0.735	-b
$-3b/4$	0.974	-0.670	0.984	0.788	$-3b/4$
$-b/2$	1.004	-0.128	1.002	0.845	$-b/2$
$-b/4$	1.028	0.418	1.017	0.910	$-b/4$
0	1.039	0.974	1.024	0.984	0
$+b/4$	1.028	1.542	1.017	1.065	$+b/4$
$+b/2$	1.004	2.121	1.002	1.151	$+b/2$
$+3b/4$	0.974	2.706	0.984	1.235	$+3b/4$
+b	0.942	3.290	0.966	1.313	+b

Fonte: San Martin (1981)

Para determinar os coeficientes de repartição de  $\alpha$  da Tabela 12 é preciso realizar uma interpolação, conforme Equação (22):

$$m_{\alpha} = m_0 + (m_0 - m_1)\sqrt{\alpha} \quad (22)$$

onde,

$m_{\alpha}$  = coeficiente de repartição para  $0 < \alpha < 1$

$m_0$  = coeficiente de repartição para  $\alpha = 0$  (sem rigidez a torção)

$m_1$  = coeficiente de repartição para  $\alpha = 1$  (placa ortotrópica)

Abaixo seguem os valores dos coeficientes para os valores de  $\alpha$  da Tabela 12 e  $\theta=0.3$  (Tabela 14).

Tabela 14 - Coeficientes de repartição para  $\theta=0.6$

Posição da carga	VIGAS					
	H=2.00m		H=3.00m		H=3.50m	
	Interna	Externa	Interna	Externa	Interna	Externa
-b	0.95	-0.65	0.95	-0.86	0.95	-0.91
-3b/4	0.98	-0.25	0.98	-0.41	0.98	-0.45
-b/2	1.00	0.15	1.00	0.05	1.00	0.02
-b/4	1.02	0.56	1.03	0.51	1.03	0.49
0	1.03	0.98	1.04	0.98	1.04	0.98
+b/4	1.02	1.40	1.03	1.46	1.03	1.47
+b/2	1.00	1.84	1.00	1.95	1.00	1.97
+3b/4	0.98	2.28	0.98	2.44	0.98	2.48
+b	0.95	2.72	0.95	2.93	0.95	2.99

Fonte: Adaptado de San Martin (1981)

Toda formulação acima descrita é desrespeito a valores referentes para placas. Portanto, deve-se dividir os coeficientes  $m_{\alpha}$  pela largura do tabuleiro ( $2 \times 8 = 16$ ) e multiplica-los pela largura que cada longarina abrange. Ou seja, as vigas externas têm largura de influência de 5.00m e a viga interna tem largura de influência de 6.00m. Como pode ser observado abaixo (Tabela 15).

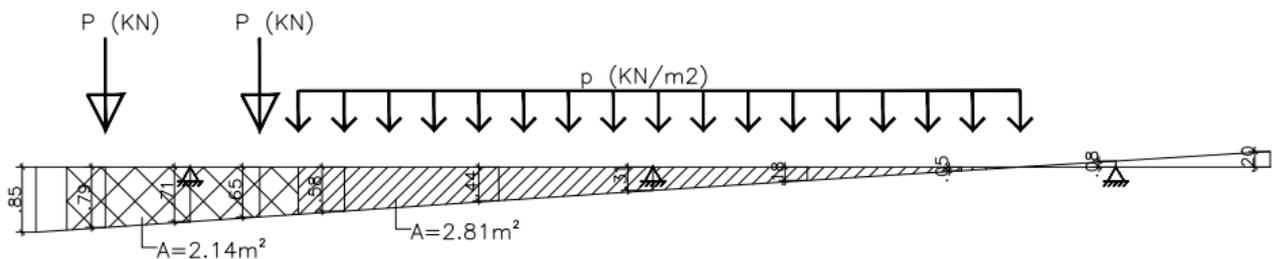
Tabela 15 - Coeficientes de repartição para cada viga longarina

Posição da carga	VIGAS					
	H=2.00m		H=3.00m		H=3.50m	
	Interna	Externa	Interna	Externa	Interna	Externa
-b	0.36	-0.20	0.35	-0.27	0.35	-0.28
-3b/4	0.37	-0.08	0.37	-0.13	0.37	-0.14
-b/2	0.38	0.05	0.38	0.02	0.38	0.01
-b/4	0.38	0.18	0.38	0.16	0.38	0.15
0	0.39	0.31	0.39	0.30	0.39	0.30
+b/4	0.38	0.44	0.38	0.45	0.38	0.46
+b/2	0.38	0.58	0.38	0.61	0.38	0.62
+3b/4	0.37	0.71	0.37	0.76	0.37	0.78
+b	0.36	0.85	0.35	0.92	0.35	0.93

Fonte: Adaptado de San Martin (1981)

Com os valores dos coeficientes de repartição, determina-se o trem-tipo das vigas externas e da viga interna a partir do carregamento posicionando o veículo-tipo na seção transversal da ponte. Com isso, faz-se o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão das vigas longarinas externas ( $H=2.00\text{m}$ ) com seus respectivos coeficientes (Figura 43) e posteriormente montar o trem-tipo (Figura 44).

Figura 43 - Coeficientes de repartição para vigas externas, ( $H=2.00\text{m}$ )



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

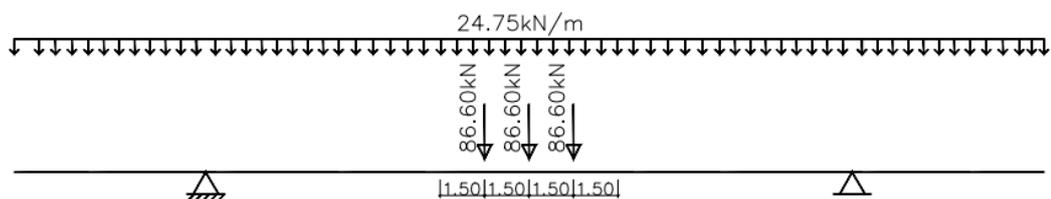
1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:

- Reação devida à carga  $P = 75 \text{ kN}$ :  
 $RP = 75 \times (0,79 + 0,65) = 108 \text{ kN}$
- Reação devida ao carregamento  $p = 5 \text{ kN/m}^2$ :  
 $R_{p1} = 5 \times 2,81 = 14,05 \text{ kN/m}$

2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:

- Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  ao lado do veículo:  
 $R_{p1} = 5 \times 2,81 = 14,05 \text{ kN/m}$
- Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  à frente e atrás do veículo:  
 $R_{p2} = 5 \times 2,14 = 10,70 \text{ kN/m}$

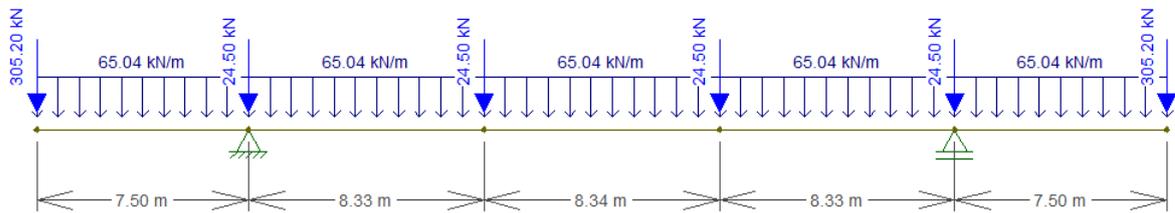
Figura 44 - Trem-tipo para as vigas externas, ( $H=2.00\text{m}$ )



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

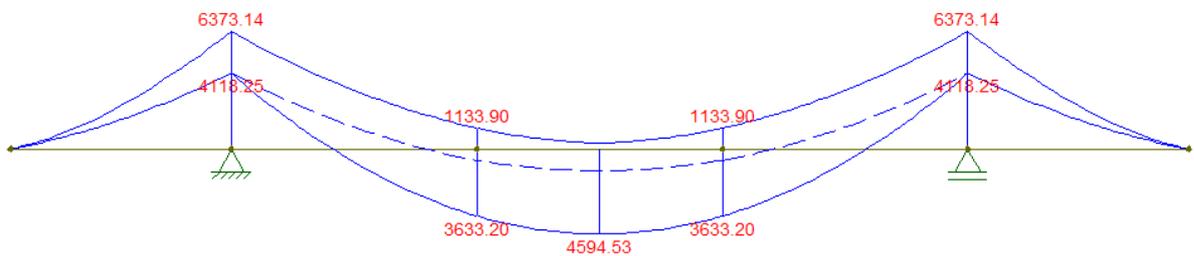
Abaixo segue o carregamento permanente para as vigas externas, (H=2.00m), conforme Figura 45 e envoltórias de esforços (Figura 46).

Figura 45 - Carregamento permanente para as vigas externas, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

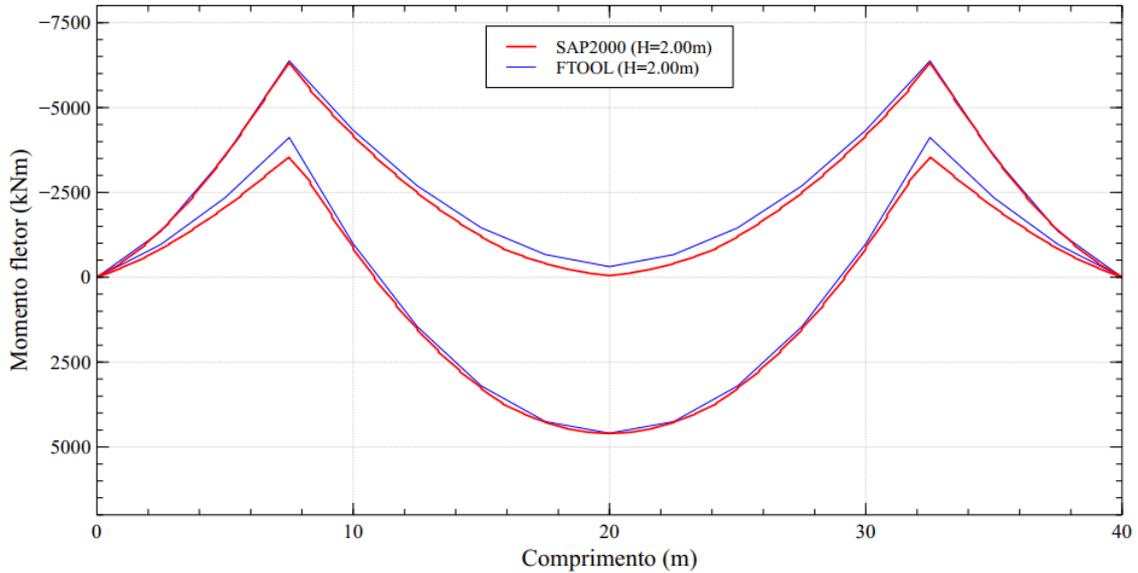
Figura 46 - Envoltória de momento fletor para as vigas externas, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base Figura 47 na pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para as vigas externas com H=2.00m.

Figura 47 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para vigas externas, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Tabela 16 pode-se verificar os momentos fletores máximos e mínimos extraídos dos softwares Ftool e SAP2000. Com base na relação (R%) entre momentos, pode-se perceber a relevante proximidade dos momentos fletores.

Tabela 16 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para vigas externas, (H=2.00m)

VIGAS EXTERNAS (H=2.00m)		
Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	4594.53	-6373.14
SAP2000 (H=2.00m)	4602.62	-6317.66

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Na relação R(%) os valores negativos expressam que os momentos fletores do SAP2000 superaram os momentos fletores do Ftool. Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos das vigas externas com altura H=2.00m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{4594.53 - 4602.62}{4594.53} \times 100$$

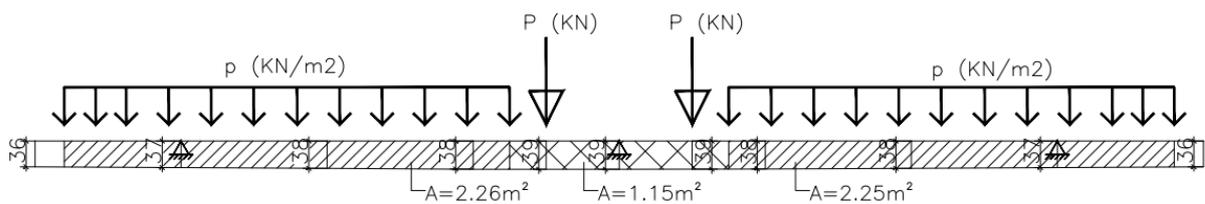
$$R_{\text{máx}} (\%) = -0.18\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{-6373.14 - (-6317.66)}{-6373.14} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = 0.87\%$$

Seguindo o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão da viga longitudinal interna ( $H=2.00\text{m}$ ) com seus respectivos coeficientes (Figura 48) e posteriormente montar o trem-tipo (Figura 49).

Figura 48 - Coeficientes de repartição para a viga interna, ( $H=2.00\text{m}$ )

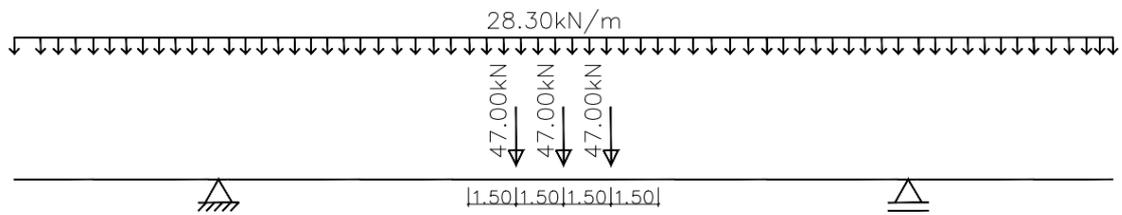


Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Abaixo segue o roteiro de cálculo para obtenção do trem-tipo de flexão para a viga longitudinal interna:

- 1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $P = 75 \text{ kN}$ :  
 $R_P = 75 (0.39 + 0.39) = 58.50 \text{ kN}$
  - Reação devida ao carregamento  $p = 5 \text{ KN/m}^2$ :  
 $R_{p1} = 5 \times (2.26 + 2.25) = 22.55 \text{ kN/m}$
- 2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  ao lado do veículo:  
 $R_{p1} = 5 \times (2.26 + 2.25) = 22.55 \text{ kN/m}$
  - Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  à frente e atrás do veículo:  
 $R_{p2} = 5 \times 1.15 = 5.75 \text{ kN/m}$

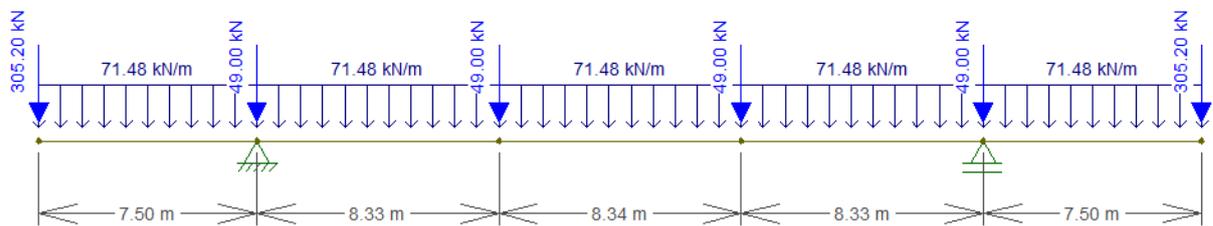
Figura 49 - Trem-tipo para a viga interna, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

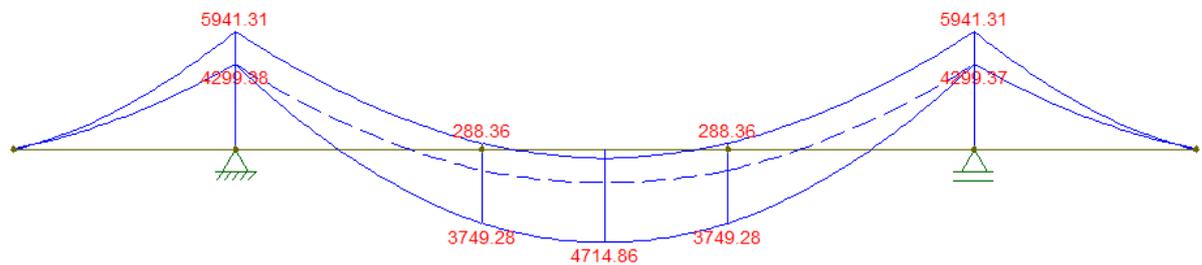
Abaixo segue o carregamento permanente para a viga interna, (H=2.00m), conforme Figura 50 e envoltórias de esforços (Figura 51).

Figura 50 - Carregamento permanente para a viga interna, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

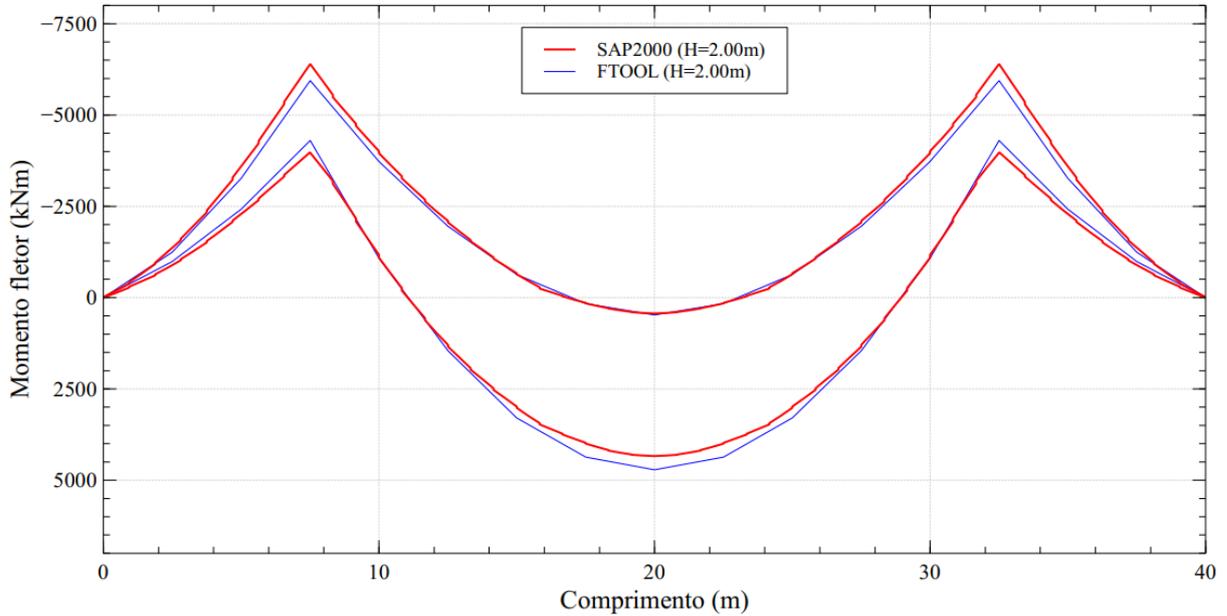
Figura 51 - Envoltória de momento fletor para a viga interna, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 52 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para a viga interna com H=2.00m.

Figura 52 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para viga interna, (H=2.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Tabela 17 pode-se verificar os momentos fletores máximos e mínimos extraídos dos softwares Ftool e SAP2000. Com base na relação (R%) entre momentos, nota-se um comportamento diferente em comparação com as vigas externas, os momentos neste caso, se divergiram, mas continuam próximos.

Tabela 17 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para viga interna, (H=2.00m)

VIGA INTERNA (H=2.00m)		
Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	4714.86	-5941.31
SAP2000 (H=2.00m)	4341.66	-6397.87

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Na relação R(%) os valores negativos expressam que os momentos fletores do SAP2000 superaram os momentos fletores do Ftool. Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos da viga interna com altura H=2.00m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{4714.86 - 4341.66}{4714.86} \times 100$$

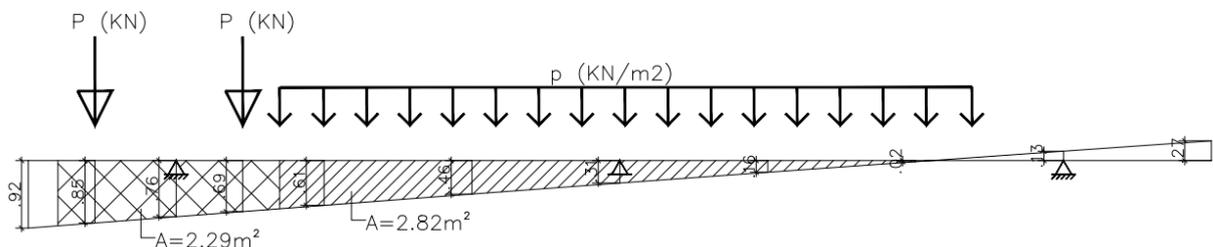
$$R_{\text{máx}} (\%) = 7.92\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{-5941.31 - (-6397.87)}{-5941.31} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = -7.68\%$$

Seguindo o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão das vigas longarina externas ( $H=3.00\text{m}$ ) com seus respectivos coeficientes (Figura 53) e posteriormente montar o trem-tipo (Figura 54).

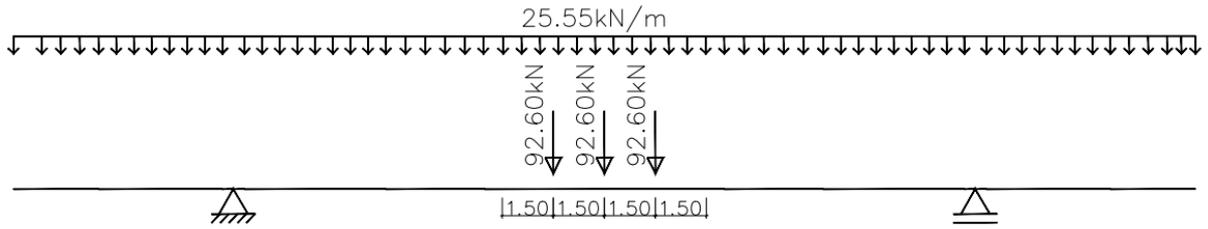
Figura 53 - Coeficientes de repartição para vigas externas, ( $H=3.00\text{m}$ )



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

- 1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $P = 75 \text{ kN}$ :
 
$$R_P = 75 \times (0.85 + 0.69) = 115.50 \text{ kN}$$
  - Reação devida ao carregamento  $p = 5 \text{ kN/m}^2$ :
 
$$R_{p1} = 5 \times 2.82 = 14.10 \text{ kN/m}$$
- 2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  ao lado do veículo:
 
$$R_{p1} = 5 \times 2.82 = 14.10 \text{ kN/m}$$
  - Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  à frente e atrás do veículo:
 
$$R_{p2} = 5 \times 2.29 = 11.45 \text{ kN/m}$$

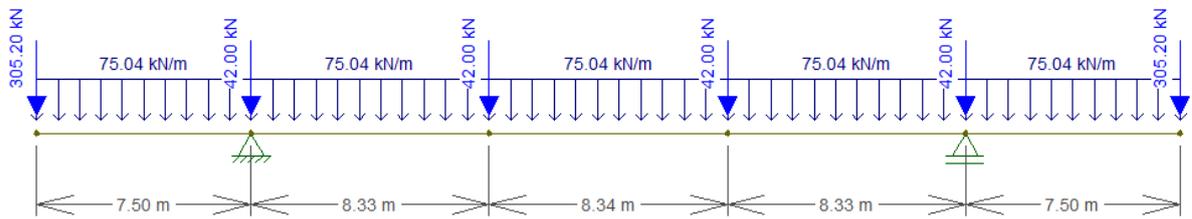
Figura 54 - Trem-tipo para as vigas externas, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

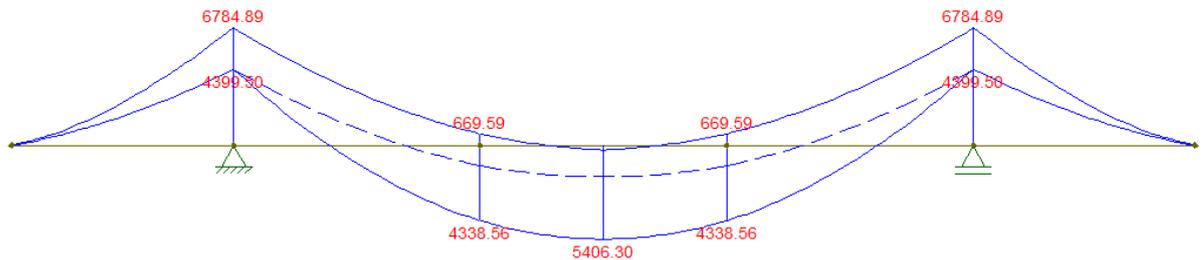
Abaixo segue o carregamento permanente para as vigas externas, (H=3.00m), conforme Figura 55 e envoltórias de esforços (Figura 56).

Figura 55 - Carregamento permanente para as vigas externas, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

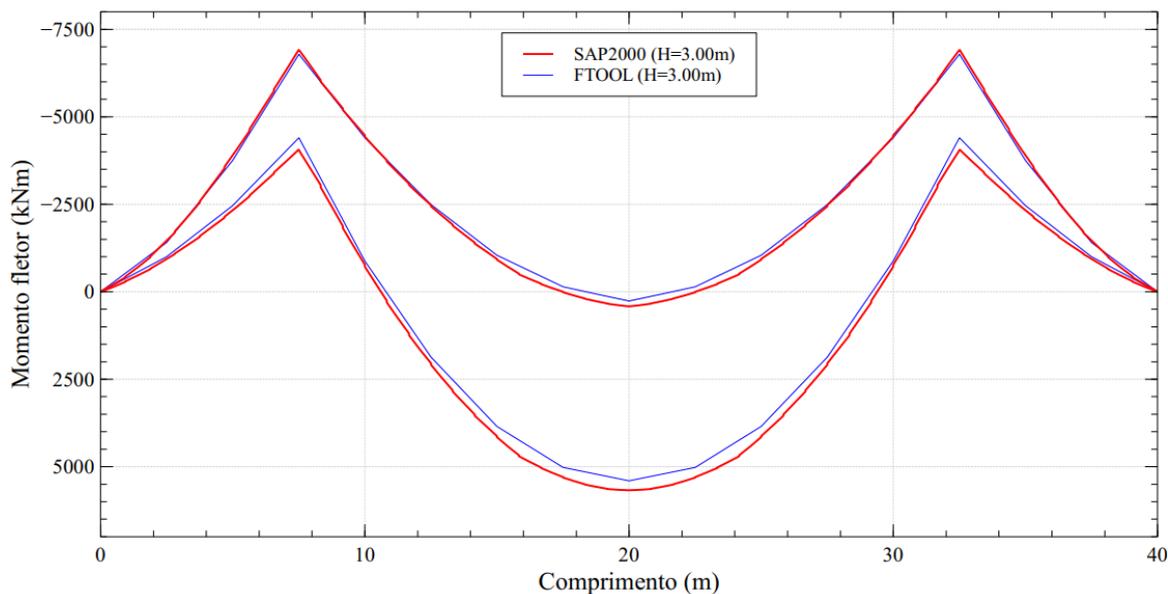
Figura 56 - Envoltória de momento fletor para as vigas externas, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 57 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para as vigas externas com H=3.00m.

Figura 57 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para vigas externas, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Tabela 18 pode-se verificar os momentos fletores máximos e mínimos extraídos dos softwares Ftool e SAP2000. Com base na relação (R%) entre momentos, percebe-se que ao aumentar a rigidez das vigas externas, os momentos tendem a se divergir, como pode ser observado pelos resultados das relações das vigas longarinas com H=3.00m em comparação com as vigas externas com H=2.00m, mostrados anteriormente.

Tabela 18 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para vigas externas, (H=3.00m)

VIGAS EXTERNAS (H=3.00m)		
Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	5406.30	-6784.89
SAP2000 (H=3.00m)	5675.67	-6921.70

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Na relação R(%) os valores negativos expressam que os momentos fletores do SAP2000 superaram os momentos fletores do Ftool. Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos das vigas externas com altura H=3.00m.

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{5406.30 - 5675.67}{5406.30} \times 100$$

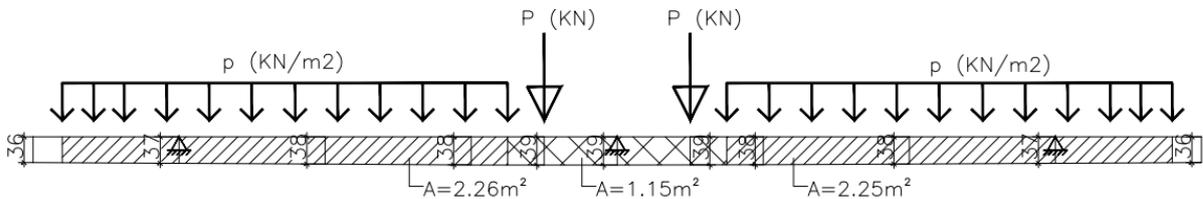
$$R_{\text{máx}} (\%) = -4.98\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{-6784.89 - (-6921.70)}{-6784.89} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = -2.02\%$$

Seguindo o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão da viga longitudinal interna (H=3.00m) com seus respectivos coeficientes (Figura 58) e posteriormente montar o trem-tipo (Figura 59).

Figura 58 - Coeficientes de repartição para a viga interna, (H=3.00m)

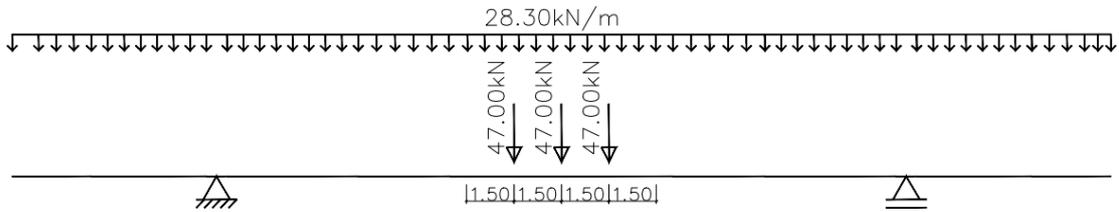


Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Abaixo segue o roteiro de cálculo para obtenção do trem-tipo de flexão para a viga longitudinal interna:

- 1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $P = 75$  kN:
 
$$R_P = 75 (0.39 + 0.39) = 58.50 \text{ kN}$$
  - Reação devida ao carregamento  $p = 5$  KN/m²:
 
$$R_{p1} = 5 \times (2.26 + 2.25) = 22.55 \text{ kN/m}$$
- 2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $p = 5$  kN/m² ao lado do veículo:
 
$$R_{p1} = 5 \times (2.26 + 2.25) = 22.55 \text{ kN/m}$$
  - Reação devida à carga  $p = 5$  kN/m² à frente e atrás do veículo:
 
$$R_{p2} = 5 \times 1.15 = 5.75 \text{ kN/m}$$

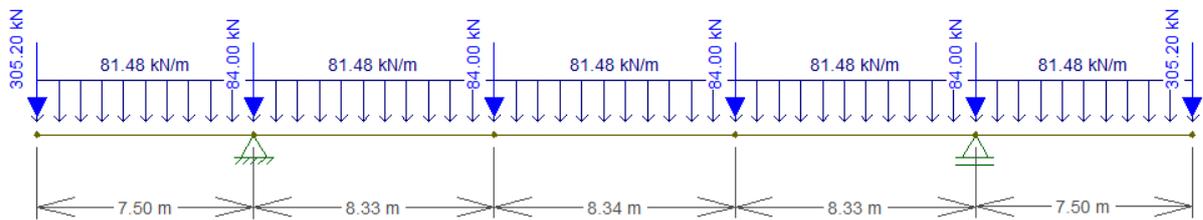
Figura 59 - Trem-tipo para a viga interna, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

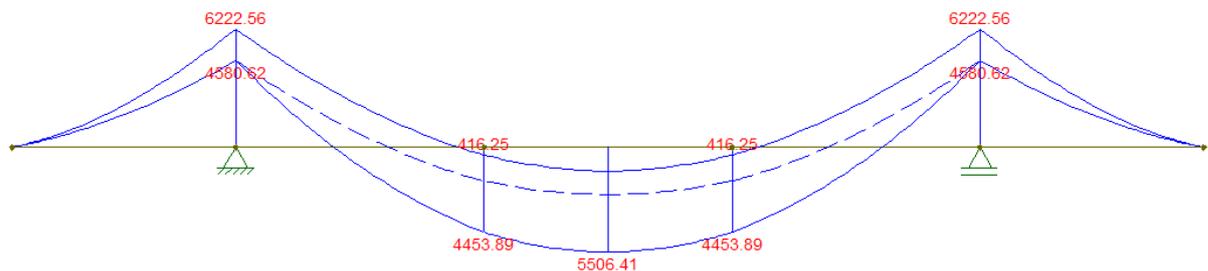
Abaixo segue o carregamento permanente para a viga interna, (H=3.00m), conforme Figura 60 e envoltórias de esforços (Figura 61).

Figura 60 - Carregamento permanente para a viga interna, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

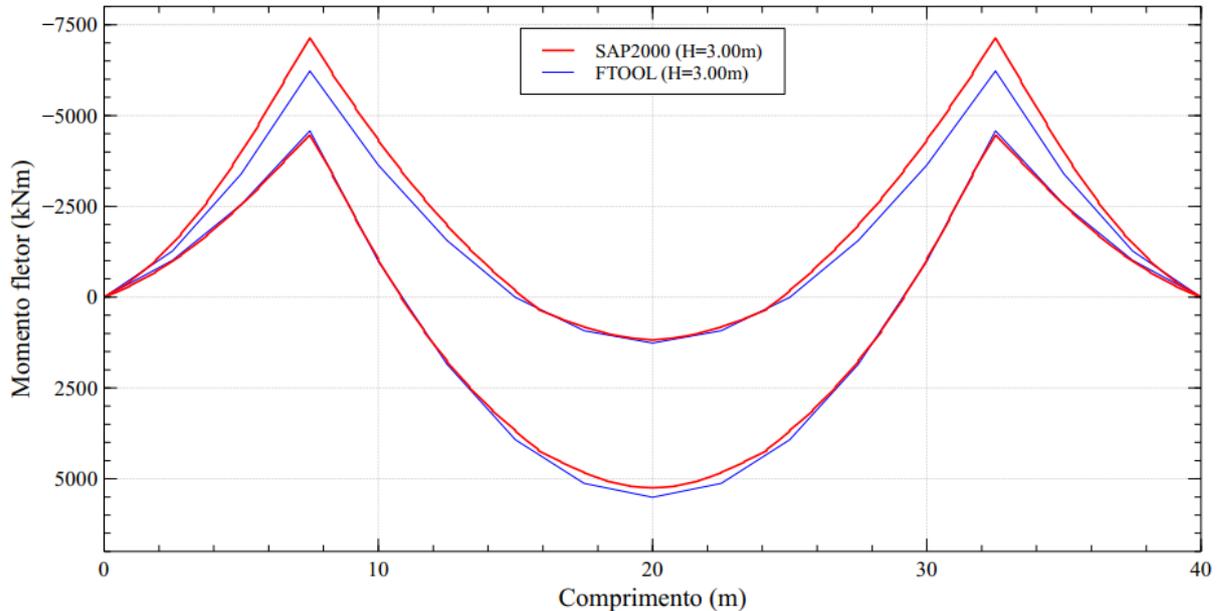
Figura 61 - Envoltória de momento fletor para a viga interna, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 62 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para a viga interna com H=3.00m.

Figura 62 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para viga interna, (H=3.00m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base Tabela 19 na pode-se verificar os momentos fletores máximos e mínimos extraídos dos softwares Ftool e SAP2000. Com base na relação (R%) entre momentos, pode-se notar que o momento máximo está convergindo para uma solução ideal, enquanto o momento mínimo está se divergindo, em comparação com resultados dos momentos das vigas internas com altura H=2.00m, mostrados anteriormente.

Tabela 19 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para viga interna, (H=3.00m)

VIGA INTERNA (H=3.00m)		
Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	5506.41	-6222.56
SAP2000 (H=3.00m)	5250.02	-7135.42

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Na relação R(%) os valores negativos expressam que os momentos fletores do SAP2000 superaram os momentos fletores do Ftool. Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos da viga interna com altura H=3.00m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{5506.41 - 5250.02}{5506.41} \times 100$$

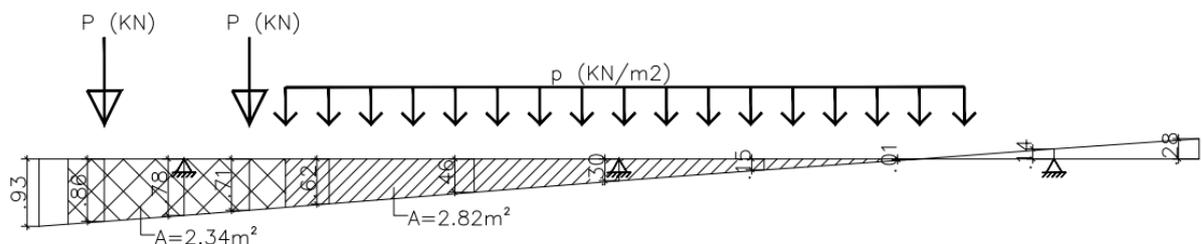
$$R_{\text{máx}} (\%) = 4.66\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{-6222.56 - (-7135.42)}{-6222.56} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = -14.67\%$$

Seguindo o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão das vigas longarina externas (H=3.50m) com seus respectivos coeficientes (Figura 63) e posteriormente montar o trem-tipo (Figura 64).

Figura 63 - Coeficientes de repartição para vigas externas, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:

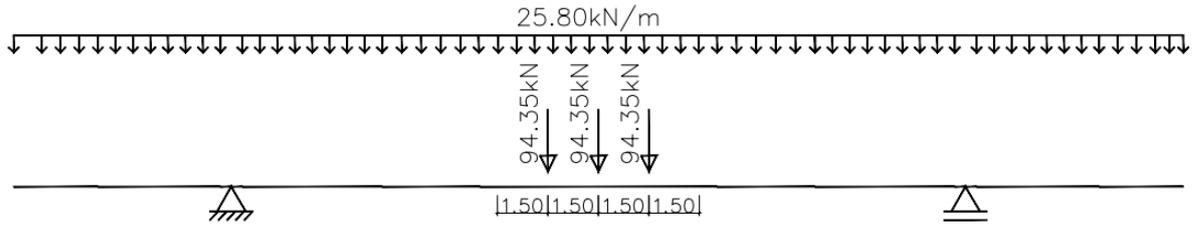
- Reação devida à carga  $P = 75 \text{ kN}$ :  
 $RP = 75 \times (0.86 + 0.71) = 117.75 \text{ kN}$

- Reação devida ao carregamento  $p = 5 \text{ kN/m}^2$ :  
 $R_{p1} = 5 \times 2.82 = 14.10 \text{ kN/m}$

2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:

- Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  ao lado do veículo:  
 $R_{p1} = 5 \times 2.82 = 14.10 \text{ kN/m}$
- Reação devida à carga  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  à frente e atrás do veículo:  
 $R_{p2} = 5 \times 2.34 = 11.70 \text{ kN/m}$

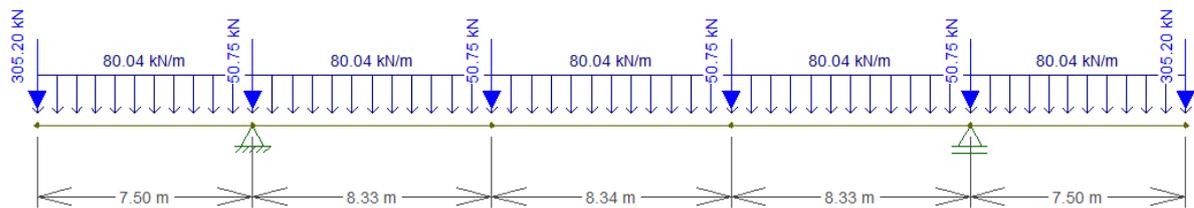
Figura 64 - Trem-tipo para as vigas externas, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

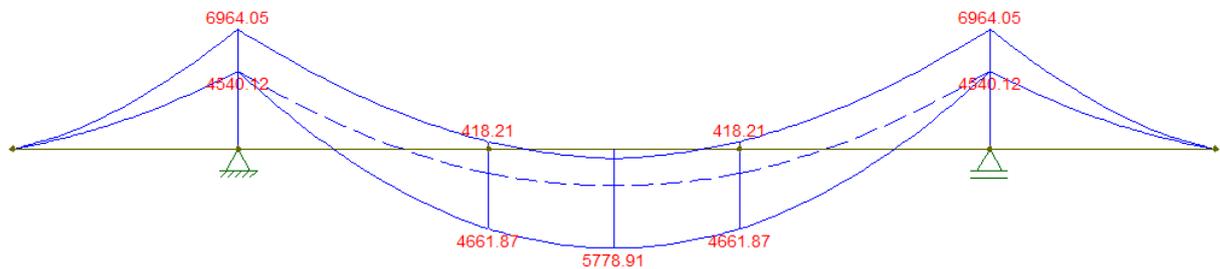
Abaixo segue o carregamento permanente para as vigas externas, (H=3.50m), conforme Figura 65 e envoltórias de esforços (Figura 66).

Figura 65 - Carregamento permanente para as vigas externas, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

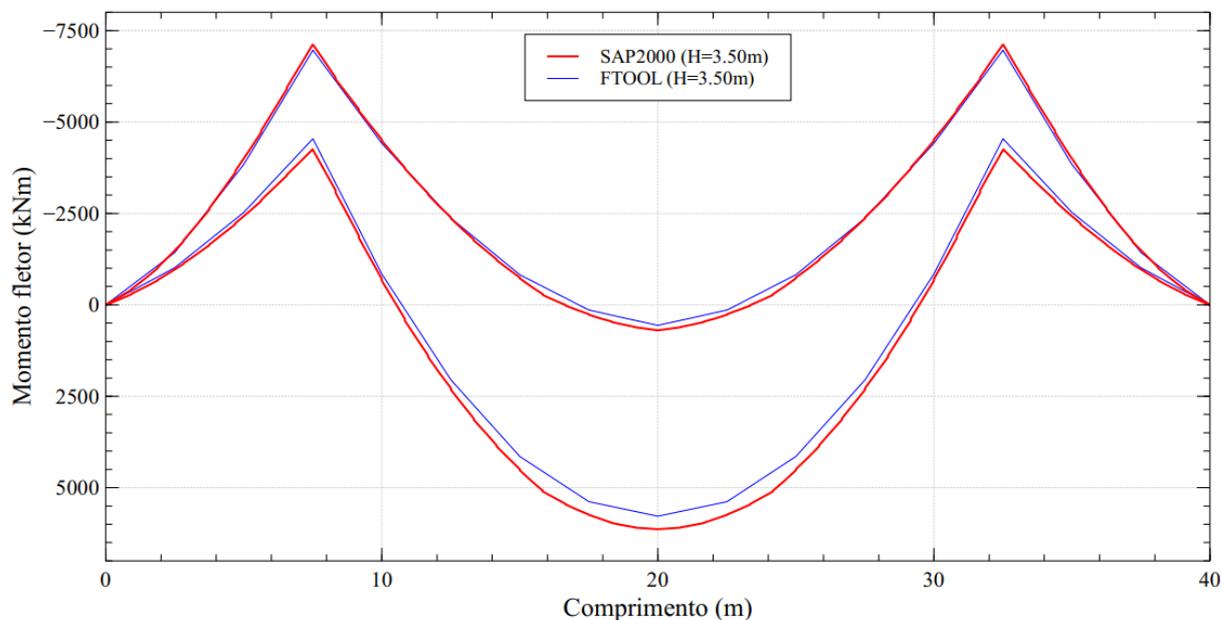
Figura 66 - Envoltória de momento fletor para as vigas externas, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base Figura 67 na pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para as vigas externas com H=3.50m.

Figura 67 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para vigas externas, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Tabela 20 pode-se verificar os momentos fletores máximos e mínimos extraídos dos softwares Ftool e SAP2000. Com base na relação (R%) entre momentos, pode-se perceber que os momentos continuam se divergindo, tanto o momento máximo, quanto o momento mínimo.

Tabela 20 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para vigas externas, (H=3.50m)

VIGAS EXTERNAS (H=3.50m)		
Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	5778.91	-6964.05
SAP2000 (H=3.50m)	6134.04	-7130.38

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Na relação R(%) os valores negativos expressam que os momentos fletores do SAP2000 superaram os momentos fletores do Ftool. Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos das vigas externas com altura H=3.50m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{5778.91 - 6134.04}{5778.91} \times 100$$

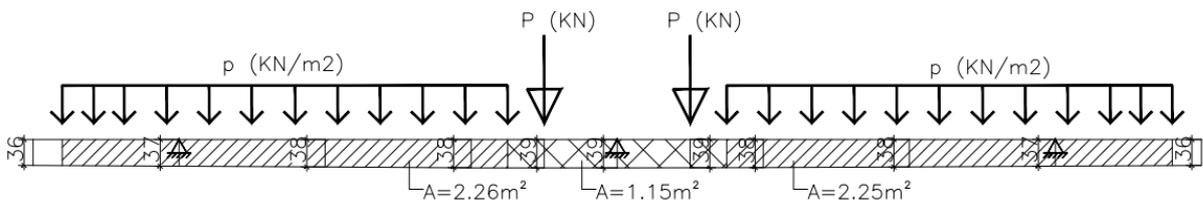
$$R_{\text{máx}} (\%) = -6.15\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{-6964.05 - (-7130.38)}{-6964.05} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = -2.39\%$$

Seguindo o passo a passo de cálculo abaixo para determinar o trem-tipo de flexão da viga longarina interna (H=3.50m) com seus respectivos coeficientes (Figura 68) e posteriormente montar o trem-tipo (Figura 69).

Figura 68 - Coeficientes de repartição para a viga interna, (H=3.50m)

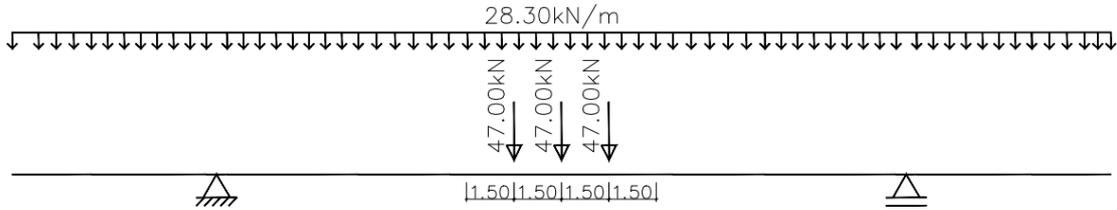


Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Abaixo segue o roteiro de cálculo para obtenção do trem-tipo de flexão para a viga longarina interna:

- 1) Análise do corte que passa dentro da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $P = 75$  kN:
 
$$R_P = 75 (0.39 + 0.39) = 58.50 \text{ kN}$$
  - Reação devida ao carregamento  $p = 5$  KN/m²:
 
$$R_{p1} = 5 \times (2.26 + 2.25) = 22.55 \text{ kN/m}$$
- 2) Análise do corte que passa fora da faixa do veículo-tipo:
  - Reação devida à carga  $p = 5$  kN/m² ao lado do veículo:
 
$$R_{p1} = 5 \times (2.26 + 2.25) = 22.55 \text{ kN/m}$$
  - Reação devida à carga  $p = 5$  kN/m² à frente e atrás do veículo:
 
$$R_{p2} = 5 \times 1.15 = 5.75 \text{ kN/m}$$

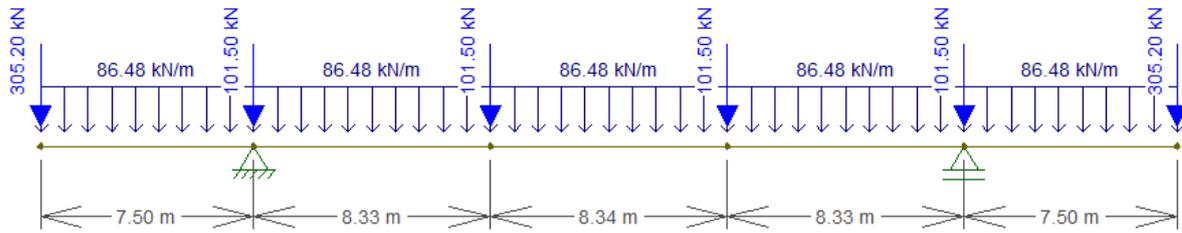
Figura 69 - Trem-tipo para a viga interna, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

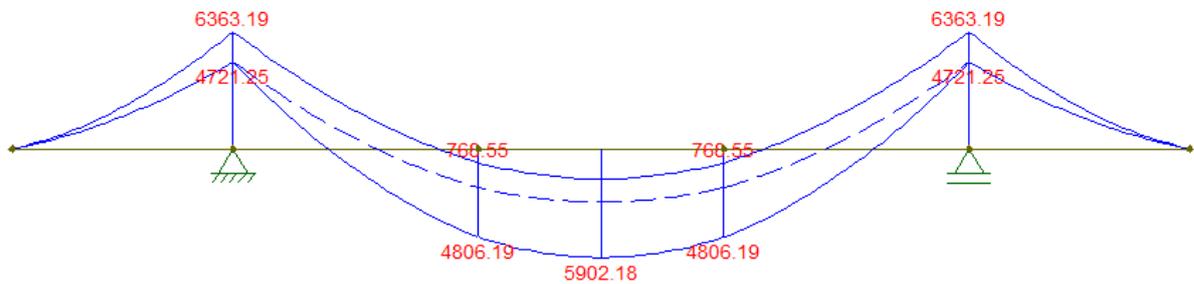
Abaixo segue o carregamento permanente para a viga interna, (H=3.50m), conforme Figura 70 e envoltórias de esforços (Figura 71).

Figura 70 - Carregamento permanente para a viga interna, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

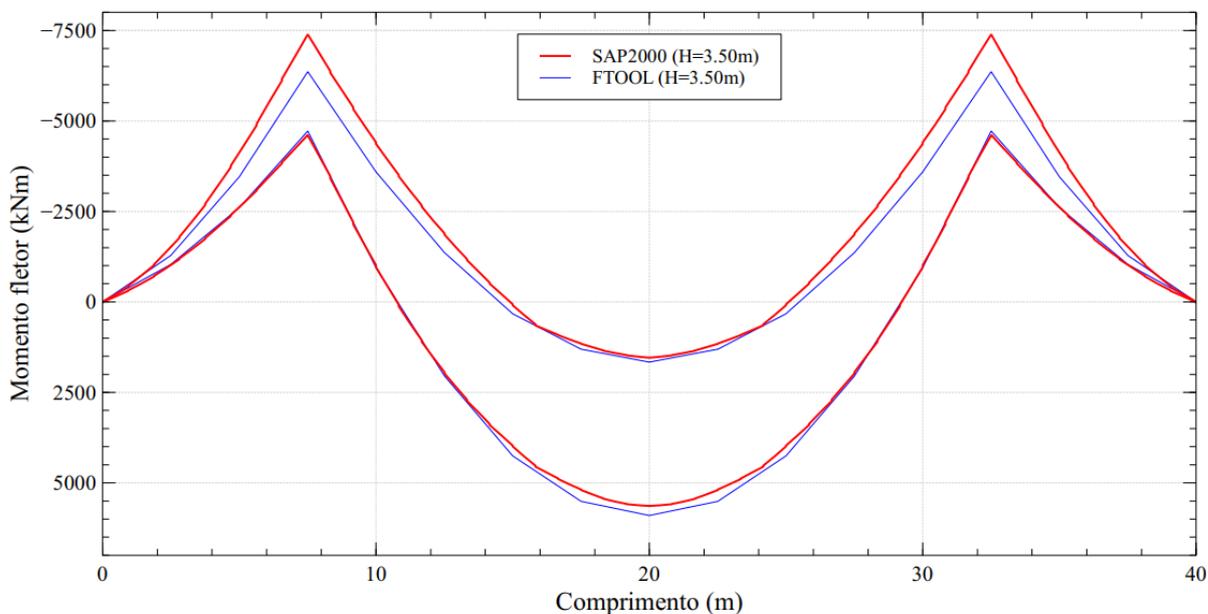
Figura 71 - Envoltória de momento fletor para a viga interna, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base na Figura 72 pode-se verificar a comparação entre os momentos fletores obtidos pelos métodos 2D (Ftool) e 3D (SAP2000) para a viga interna com H=3.50m.

Figura 72 - Envoltórias de momentos fletores obtidos através do Ftool e SAP2000 para viga interna, (H=3.50m)



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Com base Tabela 21 na pode-se verificar os momentos fletores máximos e mínimos extraídos dos softwares Ftool e SAP2000. Com base na relação (R%) entre momentos, nota-se a convergência do momento máximo e a divergência dos momentos mínimos em comparação com as outras duas alturas de vigas.

Tabela 21 - Momentos máximos e mínimos obtidos através do Ftool e do SAP2000 para viga interna, (H=3.50m)

VIGA INTERNA (H=3.50m)		
Momento Fletor (kN.m)	Máximo	Mínimo
Ftool	5902.18	-6363.19
SAP2000 (H=3.50m)	5637.69	-7389.61

Fonte: Desenvolvido pelo autor (2020)

Na relação R(%) os valores negativos expressam que os momentos fletores do SAP2000 superaram os momentos fletores do Ftool. Aplicando a Equação 14 para os momentos máximos e mínimos da viga interna com altura H=3.50m:

$$R_{\text{máx}} (\%) = \frac{5902.18 - 5637.69}{5902.18} \times 100$$

$$R_{\text{máx}} (\%) = 4.48\%$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = \frac{-6363.19 - (-7389.61)}{-6363.19} \times 100$$

$$R_{\text{mín}} (\%) = -16.13\%$$

## CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo realizar uma análise comparativa entre metodologias de cálculo distintas, investigando a influência da rigidez na distribuição dos esforços em pontes dotadas de duas vigas e em pontes de vigas múltiplas. Para obtenção dos esforços internos foram utilizados os softwares: Ftool, utilizando análise 2D e *SAP2000*, utilizando análise por meio dos Elementos Finitos.

Foram obtidos os trens-tipo de flexão simplificados para os dois casos de pontes. No caso da ponte dotada de duas vigas utilizou-se o método das linhas de influência, este considera rigidez infinita das vigas longarinas. Nas pontes de vigas múltiplas foram utilizados os coeficientes de repartição transversal pelo método de Guyon-Massonnet, o qual considera a rigidez das longarinas e transversinas, bem como os espaçamentos das vigas principais e secundárias.

Considerando os carregamentos permanentes e as cargas móveis foi possível com o auxílio dos softwares Ftool e *SAP2000* obter as envoltórias de esforços dos momentos fletores para os dois casos. De posse desses dados, realizou-se comparações dos resultados para as vigas com diferentes alturas.

No caso das pontes dotadas de duas vigas notou-se que o aumento da altura das vigas longarinas resulta em uma aproximação dos resultados obtidos a partir do *SAP2000* com os resultados obtidos no Ftool. Portanto, as vigas com pouca rigidez, isto é, as vigas com  $H=2.00\text{m}$ , resultaram numa relação entre momentos máximos de 19.11% e entre momentos mínimos de 12.07%.

Por outro lado, se aumentarmos essa altura,  $H=3.50\text{m}$ , a relação entre momentos máximos diminui consideravelmente, resultando em 7.52% e a relação entre momentos mínimos de 4.27%. No caso das pontes dotadas de duas vigas os momentos obtidos pelo Ftool foram superiores aos momentos do *SAP2000*, tornando esse método favorável a segurança.

No segundo caso, as pontes de vigas múltiplas consideram a rigidez à flexão e à torção das vigas longarinas e transversinas, fato que aproximam os resultados de ambas as metodologias de cálculo em algumas seções das vigas, independente da rigidez das vigas longarinas.

Os resultados obtidos para as vigas externas com  $H=2.00\text{m}$  se aproximaram melhor que as outras duas alturas das vigas longarinas, levando a crer que vigas mais flexíveis tendem a convergir os resultados do *SAP2000* com os resultados do Ftool. Por outro lado, a viga interna

H=2.00m apresentou uma relação entre momentos máximos e mínimos maior que a relação entre os momentos das vigas externas. Vale destacar, que para as vigas externas os momentos máximos e mínimos obtidos pelo SAP2000 apresentaram resultados mais satisfatórios a segurança.

A relação dos momentos mínimos para as vigas internas mostrou que o aumento da rigidez resulta em uma maior diferença entre momentos mínimos, mostrando resultados mais favoráveis a segurança utilizando o SAP2000. Entretanto, os momentos máximos apresentam uma aproximação dos resultados aumentando a rigidez das vigas internas.

Com isso, esse estudo mostra a importância da comparação entre metodologias de cálculo distintas, pois assim, pode-se perceber os prós e contras de cada método e utilizar os resultados mais favoráveis a favor da segurança para o correto dimensionamento das pontes.

Algumas sugestões para futuros trabalhos:

- Realizar uma análise comparativa entre o método das linhas de influência e MEF para seção de três vigas.
- Utilizar o método de Engesser-Courbon para obter os coeficientes de repartição para pontes de vigas múltiplas e comparar os resultados com o MEF.
- Comparar o método de Engesser-Courbon, Guyon-Massonnet e MEF para pontes de vigas múltiplas.
- Validação dos resultados obtidos neste trabalho variando outros parâmetros, tais como: espaçamento entre longarinas e transversinas, mudança da seção transversal e longitudinal da ponte, utilização de outras alturas de longarinas e transversinas.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed, v4. Rio Grande: Dunas, 2014. 323 p
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. CAMPINAS, SP: EDITORA DA UNICAMP, 2003. 298 p.
- ASSIS, G. C. O.; BEZERRA, E. M. F. **Sistema multiplataforma para análise de pórticos planos utilizando ambiente web**. 38° Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Florianópolis, CILAMCE, 2017.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6120:2019**. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 2019.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6118:2014**. Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- \_\_\_\_\_. **NBR 7188:2013**. Carga móvel rodoviária e de pedestre em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013.
- \_\_\_\_\_. **NBR 7187:2003**. Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido- Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.
- BEZERRA, E. M. F. **Análise das estruturas do estádio Manoel Leonardo Nogueira**. Anais do I Congresso de Engenharia Estrutural e Construção Civil da UFC. Fortaleza, CECUFC, 2015.
- BRASIL, Reyolando M L R F ; BALTHAZAR, JOSÉ M.; Wesley Goes. **Métodos Numéricos e Computacionais na Prática de Engenharias e Ciências**. 1. ed. São Paulo,SP: Blucher, 2015. v. 1. 186p.
- COOK, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. & Witt, R. J., 2012. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4ª ed. John Wiley & Sons.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements**. 2007. West Sussex PO19 8SQ, England: John Wiley & Sons Ltd.
- FREITAS, Moacyr. **Pontes: Introdução Geral - Definições**. São Paulo: [s.n.], 1978
- FONTES, F. F. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005
- HUTTON, David V. **Fundamentals of finite element analysis**. New York: McGraw-hill, 2004.
- KIMURA, A. E. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. São Paulo: Pini, 2018.

LEONHARDT, Fritz. **Construções de Concreto: Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, v. 6, 2013.

LIMA, G. V. F. **Análise dinâmica via método dos elementos finitos do estádio nacional de Brasília**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, 2013.

MARCHETTI, O. **Pontes de concreto armado**. 3.reimpr. São Paulo-SP: Blucher, 2013.

MARTHA, Luiz Fernando. **Métodos básicos da análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Campus, 2017.

MASON, Jayme. **Pontes em Concreto Armado e Protendido**, 1ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

MATTOS, Tales S. **Programa para Análise de Superestruturas de Pontes de Concreto Armado e Protendido**. 2001. Tese (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MENDES, L. C. **Pontes**. 2. ed. Niterói, Editora da Universidade Federal Fluminense, 2017.

PFEIL, Walter. **Pontes em Concreto Armado**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

PINHO, Fernando O; BELLEI, Ildóny E. **Pontes e viadutos em vigas mistas**. Rio de Janeiro: IBS, 2007.

SAN MARTIN, F.J. **Cálculo de Tabuleiro de Pontes**. Editora LCTE São Paulo, Brasil, 1981;

SANTOS, L. A. K; MATIAS, B. S. **Uma proposta didática para o ensino do trem-tipo de vigas longarinas em pontes com o auxílio de ferramentas computacionais**. XLVII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia e II Simpósio Internacional de Educação em Engenharia da ABENGE. COBENGE, 2019.

SORIANO, H. L. **Análise de estruturas: formulação matricial e implementação computacional**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2005. 4, 5, 20

SUSSEKIND, José Carlos. **Curso de Análise Estrutural**, vol. 1–Estruturas Isostáticas. Editora Globo, 1981.

VITÓRIO, José A. P. **Um estudo comparativo sobre métodos de alargamento de pontes rodoviárias de concreto armado**. 2013. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade do Porto, Portugal